

3D Medusa(Advanced Coloring)

3D Medusa (Advanced Coloring)は複数の候補数字を対象としたグラフ彩色手法です。

対象が単一クラスタ(strong linkで結合している候補数字群のこと。全体がstrong linkで結合しているので解の候補パターンは2通りしか存在しない。クラスタ内の個々の候補数字には固有の色=パリティが与えられる)の場合、3D Medusaはペンシル・マークを使えば人間が実行可能な手法であり、紙と鉛筆で実行可能です。

対象を複数のクラスタに拡大した場合は、9層のレイヤを持つ3次元格子内で候補数字から候補数字への連鎖を解析する手法となります。

具体例の紹介

3D MedusaはSimple Colors(http://www.sudopedia.org/wiki/Simple_Colors), Multi-Colors(<http://www.sudopedia.org/wiki/Multi-Colors>)のルールを複数の数字を対象とするように拡張した手筋です。単独の候補数字に対してのみ「色」を割り当てる場合は、9行9列の2次元平面内での彩色問題に相当します。ひとつの候補数字の彩色問題に対応する2次元平面が、3次元格子内でのひとつのレイヤに対応します。9行9列の数独の場合、1から9の9つの数字を使うので、この3次元格子は9層のレイヤで構成されます。3次元格子内の同一線上に2つだけしか候補数字が存在しない場合、2次元平面内でクラスタを構成するのと同じように、その2つの候補に対して異なる「色」を割り当てることが可能です。

すべての数独の問題を3次元格子に対する彩色問題として扱うのは強力ではありますが現実的には難しいでしょう。以下では、この手筋を紙と鉛筆を使ってペンシル・マークで実行できるようにするための手順を紹介します。

strong linkが多い数字から始める

通常は3次元格子を対象とした彩色を行う前に2次元平面を対象とした彩色が成立しないかを先に調べると思います。このような場合、最初を選ぶ数字は複数の共役ペア¹が存在し、そのうちのいくつかは2値セルであるような数字を選ぶのがベストです。2値セルが存在するのでクラスタの色分けを複数の数字に拡大可能です。

基本手筋ではこれ以上手を進められない次のような盤面があるとします。strong link²を満たすペアを見つけ、目印としてそれぞれに異なる色(=パリティ)を割り当てます。連結している候補セル³を追加していくことでクラスタを大きなものにしていきます。

1 =conjugate pair. strong linkしているペア。どちらか一方のみが真。2所セルは共役ペア。

2 一方が偽であれば他方が真であるようなペア。

3 =connected pair. 少なくともどちらか一方の候補が真であるようなペア。両方が真でも良い。

| | | | | | | | | |
|---------------------|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|----------------|--------------------|------------------|----------------|
| 2 | 5 | ³ 8 | 1 | 6 | 4 | ³ 8 | 7 | 9 |
| 6 | _{7 8} | _{7 8 9} | _{2 5} | _{3 9} | _{2 5} | ³ 8 | 1 | 4 |
| ³ 9 | 4 | 1 | _{7 8 9} | _{8 9 7} | ³ | 5 | 6 | 2 |
| _{4 7} | 1 | _{6 8} | 3 | 5 | 9 | _{4 6 7 8} | 2 | _{7 8} |
| 5 | _{2 8} | _{2 6 8} | 4 | 7 | 1 | _{6 8 9} | _{8 9} | 3 |
| _{4 7 9} | 3 | _{4 7 9} | 6 | 2 | 8 | _{4 7} | 5 | 1 |
| ³ 4 7 | 6 | 5 | _{7 8 9} | _{4 8 9 7} | ³ | 2 | 1 | _{7 8} |
| 1 | _{2 7} | _{2 4 7} | _{2 5 7 8} | _{3 4 8} | _{2 5} | _{7 8 9} | _{3 8 9} | 6 |
| 8 | 9 | _{2 3 7} | _{2 7} | 1 | 6 | ³ 7 | 4 | 5 |

この盤面の場合，開始数字の選択は簡単です。「3」の配置パターンを見て下さい。候補数字全体がひとつのクラスタを構成しており8箇所のセルは2値セルです。3以外の数字にクラスタを拡張できる可能性が高いと言えます。

開始数字に対する色分けクラスタを作成する

基本的に simple coloring と同じことを行います。まず共役ペアを選び区別のために異なる色を割り当てます。共役ペアに連結しているセル（R7C1、R8C5、R8C8、R9C3）を追加することでクラスタを拡大します。接続するペアの端点同士が異なる色になるようにします。先ほどの例のクラスタを色分けすると次のようになります。

| | | | | | | | | |
|-------------|--------|-------------|---------------|-------------|--------|----------|----------|-----|
| 2 | 5 | 3 8 | 1 | 6 | 4 | 3 8 | 7 | 9 |
| 6 | 7 8 | 7 8 9 | 2 5 | 3 9 | 2 5 | 1 | 3 8 | 4 |
| 3 9 | 4 | 1 | 7 8 9 | 8 9 | 7 | 5 | 6 | 2 |
| 4 7 | 1 | 6 8 | 3 | 5 | 9 | 4 7 8 | 2 | 7 8 |
| 5 | 2 8 | 2 6 8 | 4 | 7 | 1 | 6 8 9 | 8 9 | 3 |
| 4 7 9 | 3 | 4 7 9 | 6 | 2 | 8 | 4 7 | 5 | 1 |
| 3 4 7 | 6 | 5 | 7 8 9 | 4 8 9 | 3 7 | 2 | 1 | 7 8 |
| 1 | 2 7 | 2 4 7 | 2 5 7 8 | 3 4 8 | 2 5 | 7 8 9 | 3 8 9 | 6 |
| 8 | 9 | 2 3 7 | 2 7 | 1 | 6 | 3 7 | 4 | 5 |

2 値セル内の候補数字を色分けする

上の図では「3」が含まれるセル全体を彩色していますが、以後はセル内の候補数字単位で彩色します。クラスタ内の2 値セルを調べ、一方の候補数字だけが彩色対象であるセルがあれば彩色対象でない方の候補数字を彩色されている候補数字と「反対の色」で彩色します。

| | | | | | | | | |
|-------------|--------|-------------|---------------|-------------|--------|----------|----------|-----|
| 2 | 5 | 3 8 | 1 | 6 | 4 | 3 8 | 7 | 9 |
| 6 | 7 8 | 7 8 9 | 2 5 | 3 9 | 2 5 | 1 | 3 8 | 4 |
| 3 9 | 4 | 1 | 7 8 9 | 8 9 | 7 | 5 | 6 | 2 |
| 4 7 | 1 | 6 8 | 3 | 5 | 9 | 4 7 8 | 2 | 7 8 |
| 5 | 2 8 | 2 6 8 | 4 | 7 | 1 | 6 8 9 | 8 9 | 3 |
| 4 7 9 | 3 | 4 7 9 | 6 | 2 | 8 | 4 7 | 5 | 1 |
| 3 4 7 | 6 | 5 | 7 8 9 | 4 8 9 | 3 7 | 2 | 1 | 7 8 |
| 1 | 2 7 | 2 4 7 | 2 5 7 8 | 3 4 8 | 2 5 | 7 8 9 | 3 8 9 | 6 |
| 8 | 9 | 2 3 7 | 2 7 | 1 | 6 | 3 7 | 4 | 5 |

ここでは残りの数字に対しても塗り分けを行っていますが、この段階である程度の内容が見えている方もいるかも知れません。

新たな数字に対してクラスタを拡張する

一つ前のステップで追加した2値セル内の候補数字（今回の例の場合は7、8、9）に対して以下のチェックを行います。

- ・追加した2値セルと接続している共役ペアがあれば、その候補数字を起点としてクラスタを拡張します。

この操作を追加できる候補数字が尽きるまで繰り返し、塗り分けを進めます。

候補数字7、8、9に対する共役ペアによってクラスタを拡張した結果、次の図に示すクラスタが得られます⁴。

| | | | | | | | | | | |
|---|-----|-------|---|-------|-----|---|-----|-----|-------|-----|
| 2 | 5 | | 3 | 1 | 6 | 4 | | 3 | 7 | 9 |
| 6 | | | | 2 | | 3 | 2 | | 1 | |
| | 7 8 | 7 8 9 | | 5 | | 9 | 5 | | 8 | 4 |
| | 3 | 4 | 1 | | | | 3 | | 5 | 6 |
| | 9 | | | 7 8 9 | 8 9 | 7 | | | 2 | |
| 4 | | 1 | | 3 | 5 | 9 | 4 | 6 | 2 | |
| 7 | | | 8 | | | | 7 8 | | | 7 8 |
| | 5 | 2 | 2 | 4 | 7 | 1 | | 6 | | 3 |
| | 8 | | 8 | | | | 8 9 | 8 9 | | |
| 4 | | 3 | 4 | 6 | 2 | 8 | 4 | | 5 | 1 |
| 7 | | 9 | 7 | | | | 7 | | | |
| | 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | 6 | 5 | | 4 | | 3 | | 2 | 1 |
| 7 | | | | 7 8 9 | 8 9 | 7 | | | | 7 8 |
| | 1 | 2 | 2 | 2 | 5 | 4 | 3 | 2 | | 3 |
| | 7 | | 4 | 7 8 | | 8 | | 5 | 7 8 9 | 8 9 |
| | | | | | | | | | | 6 |
| 8 | 9 | 2 | 3 | 2 | | | | 3 | | |
| | | 7 | | 7 | 1 | 6 | 7 | | 4 | 5 |

最後の2ステップを繰り返す

もし、最終ステップでクラスタに新たな2値セルが追加されたのであれば、最後の2ステップを2値セルが追加できなくなるまで繰り返します。

最終ステップで新たな2値セルが追加できなくなったら、このステージの処理は終了です。

クラスタを解析する

次に結果を解析します。最初にクラスタに矛盾がないかどうかをチェックします。

⁴ R6C3の「9」が彩色されているのは誤りと思われます(訳者)。

(1)ひとつのセル内の2つの候補数字が同じ色で塗り分けられている。

(2)同じハウス⁵に属する同じ数字に対する2つの候補数字が同じ色に彩色されている。

このような矛盾が発生していると言うことは、そのような塗り分けはあり得ないと言うことです。したがって、矛盾を含む側の色に彩色された候補数字はすべて削除できます。

次に行うのはクラスタに属する異なる色で塗り分けられた2つのセルのそれぞれのハウスに同時に属している候補数字が存在しないかをチェックすることです。

(3)未確定の値を持つセル内に2つの色が存在するならば、塗り分けられていない候補数字は削除できます。

(4)ある数字に対して複数の候補が存在するハウス内に、その数字に対して塗り分けられた色が2つあるならば、塗り分けられていない候補数字は削除できます。

(5)彩色されている数字のハウスに属し、そのセルのハウスに「反対の色」で彩色された候補数字も存在するならば彩色されていない候補数字は削除できます。

最後⁶の(5)のタイプの候補数字絞り込みは9層のレイヤーを持つ3次元空間に対する塗り分けを行った場合に可能となります。

先ほどの例の場合、9行4列に存在する「7」に対する候補数字は3行4列と9行7列に存在する緑と青の両方の色を「見る事が出来る位置(=双方のハウスに属している)」にあります。

5 行、列、3x3ブロックのいずれかの意。

6 訳注:さらに次の定理も成立します。(6) 彩色されていない候補数字と同じグループ内に同じ値の彩色された候補数字(a)が存在し、彩色されていない候補数字と同じセルに(a)と反対の色に彩色された候補数字が存在するならば、該当する候補数字を削除できる。

| | | | | | | | | | | |
|---|-----|-------|-------|-------|-----|---|-----|-------|-----|-----|
| 2 | 5 | | 3 | 1 | 6 | 4 | | 3 | 7 | 9 |
| 6 | | | | 2 | | 3 | 2 | | 1 | 4 |
| | 7 8 | 7 8 9 | | 5 | | 9 | | | 8 | |
| 3 | 4 | 1 | | | | | 3 | | 5 | 6 |
| | | | 7 8 9 | 8 9 | 7 | | | | | |
| 4 | 1 | | 6 | 3 | 5 | 9 | 4 | 6 | 2 | |
| | | | 8 | | | | 7 8 | | | 7 8 |
| 5 | 2 | 2 | 6 | 4 | 7 | 1 | | 6 | | 3 |
| | 8 | 8 | | | | | 8 9 | 8 9 | | |
| 4 | 3 | 4 | | 6 | 2 | 8 | 4 | | 5 | 1 |
| 7 | | 7 | 9 | | | | 7 | | | |
| | 3 | 6 | 5 | | 4 | | | 3 | 2 | 1 |
| | | | | 7 8 9 | 8 9 | 7 | | | | 7 8 |
| 1 | 2 | 2 | | 2 | | 3 | 2 | | 3 | 6 |
| | 7 | 4 | | 5 | 4 | | 5 | 7 8 9 | 8 9 | |
| 8 | 9 | 2 3 | | 2 | | 1 | 6 | | 3 | 4 |
| | | 7 | | 7 | | | | 7 | | 5 |

したがって9行4列の「7」は削除できます。この結果、このセルは「2」に確定します。7行9列の「7」も7行6列と9行7列の異なる色で彩色済みの「7」の両方のハウスに属するので、やはり削除できます。
(Isao Daigo, 2010/12/14)

原文は http://www.sudopedia.org/wiki/3D_Medusa。

本文書は GNU Free Documentation License 1.2 に従っています。詳細は <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html> をご参照ください。