

目次

1. 有限要素法の基礎

1-1. 要素と節点

1-2. 境界条件

2. PolarFEM の概要

3. 解析モデルの作成

3-1. モデル形状の作成

[マウスの操作方法]

3-2. 物性値の入力

3-3. 拘束条件の設定

3-4. 荷重条件の設定

[描画/取消に関して]

4. 変形・応力の計算

4-1. バンド幅

4-2. 剛性マトリックスの組み立て

4-3. 拘束条件の設定

4-4. 連立方程式の求解

4-5. ひずみと応力

4-6. ピエゾ素子応力計算

5. 熱伝導・電場の計算

5-1. バンド幅

5-2. 剛性マトリックスの組み立て

5-3. 拘束条件の設定

5-4. 連立方程式の求解

5-5. 電界

6. 計算結果のプロット

6-1. 番号・材料・荷重・拘束条件などのプロット

6-2. コンター図、ベクトル図のプロット

6-3. 印刷、クリップボードにコピー、BMP 保存

7. 熱伝導計算と電界計算のアナロジー

8. ピエゾ連成静計算

9. ピエゾ連成動計算

10. 熱過渡計算

11. 調和応答計算

12. 固有値計算

13. 計算例

13-1. 変形・応力

13-2. 熱応力

13-3. ピエゾ内応力

13-4. バイモルフの変形

13-5. ピエゾ圧電

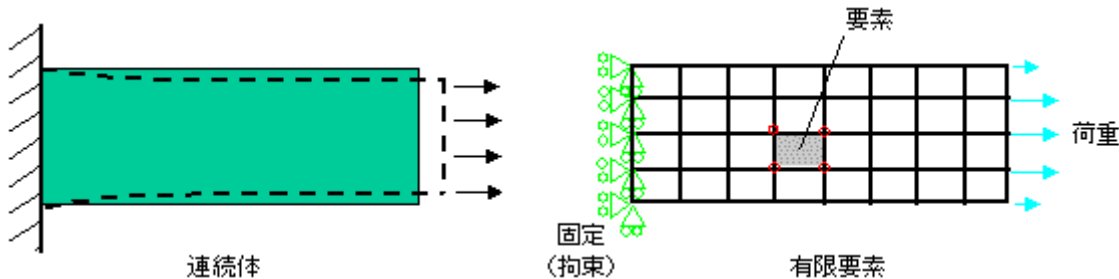
13-6. その他の計算例

14. PolarFEM のファイルフォーマット

15. ユーザーコーディング PolarFEXT

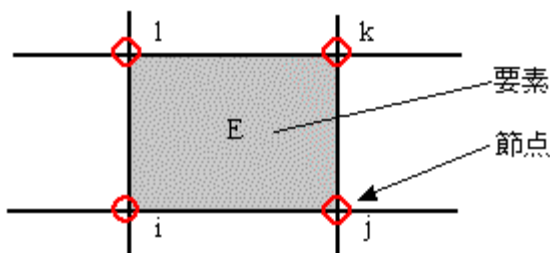
1. 有限要素法(FEM)の基礎

有限要素法(Finite Element Method)は連続な物体を有限の**要素**(Element)の集合体に近似して、その個々の要素に対して成立する方程式を集合体全体で連立させて解く方法です。構造解析では、連立方程式を解いて得られた変位より、各要素のひずみや応力を知ることができます。



1-1. 要素と節点

集合体の個々の要素には、梁、三角形要素、四辺形要素、四面体要素、六面体要素などがあります。PolarFEM で用意されている要素は**四辺形要素**(2次元要素,軸対称要素)です。要素を構成する角の点を**節点**(Node)と呼び、1次の四辺形要素では1つの要素に対して4つの節点があります。個々の要素で成立する節点荷重と節点変位の関係(**剛性**,Stiffness)を集合体全体で加算して、全節点荷重と全節点変位の関係(全体剛性マトリックス)を作り、その連立方程式を解いて節点変位を求めます。



変位 = 変形後の座標値 - 変形前の座標値
ひずみ = 伸び / 長さ = 変位の勾配
要素E = (節点i+節点j+節点k+節点l)
節点 = (x座標 , y座標)

1-2. 境界条件

節点には荷重や拘束条件などが与えられます。それらの条件を**境界条件**(Boundary Condition)と呼びます。境界条件の設定は必ず行わなければなりません。特に静計算の場合には、剛性方程式は拘束条件が無いと解けません(例えば、**剛体変位**,Rigid Body Mode が生じ位置不定となります)。

2. PolarFEM の概要

PolarFEM は**有限要素法**(Finite Element Method)による構造解析プログラムです。扱う要素は四辺形要素(1次/2次)で、**平面問題**(Planar)および**軸対称問題**(Axisymmetric)を解くために作られました。本プログラムでは熱伝導計算を電界計算と対比しながら用いることで**ピエゾ素子内の応力**を計算できます。本プログラムではディスプレイの表示以外のすべての部分を倍精度で処理、計算しています。以下、モデルの作成から結果のプロットまで解析手順のポイントを説明します。

(1). モデル形状の作成

「解析モデルの作成」パネルでモデルの形状を作成し、物性値(Property)および荷重(Load)、拘束(変位)条件(Constraint, Displacement)を与えます。モデルの作成にあたってはあらかじめ描画スケール(1を基準とした長さの倍率)と使用する単位系(Unit)を決めておきます。解析モデルの作成中には、必要に応じて、解析モデルをファイル(.mdl)に保存します。

(2). 計算の実行

「計算の実行」パネルで作成したモデルの計算を行います。熱伝導計算と変形計算を組み合わせることで、熱応力あるいはピエゾ応力を計算できます。計算結果は必要に応じて、ファイル(.out)に保存します。


(3). 計算結果のプロット

コンター図(Contour)を見るにあたって次の点に留意する必要があります。

- A. 「変位(Displacement)」は、要素内部で節点の値を要素内部に内挿して求めて表示しています。
- B. 「ひずみ(Strain)」、「応力(Stress)」は、一旦積分点の値を節点に外挿して節点での値を求め、その節点での値を平均化した後、変位の場合と同様にして要素内部に内挿しています。
- C. 要素内部での内挿は要素を2つの三角形(2次要素では8つの三角形)に分けて描画する方法をとっています。したがって、要素が粗い場合は不自然になる場合があります。

3. 解析モデルの作成(変形・応力計算)







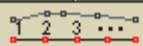



3-1. モデル形状の作成

A. 「■要素の作成/削除」で  (矢印ボタン)をクリックして、作図シート(プロット画面)上で要素の4節点の位置を左クリックします。4節点をクリックし終えた時点で要素が1つ作成されます。3番目までの節点位置をクリックした状態では右クリックで操作を戻すことができます。同じようにして、必要な数の要素を作成します。要素は反時計まわりに節点の配置として定義されます。要素を分割するには「要素分割」を利用します。また、要素群としてまとめて作成する場合は「カーブから要素への変換」、「オートメッシュ」を利用します。

要素	物性値	境界条件	データ読込
作成 編集 オートメッシュ オプション			
■要素次数		要素次数変換	
1次要素 2次要素		1→2 2→1	
■要素の作成 / 削除			
要素数: 0		節点数: 0	
x座標: 0		y座標: 0	
数値入力			
全削除		要素削除	
節点マージ			
自動 (L/20)		全節点マージ	
個別節点マージ			
許容値: 1.000E-004		(実寸法)	
要素クlean		要素クリーン	
■要素分割 / カーブから要素への変換			
要素分割		カーブへ要素変換	
エッジ1.3 (カーブ①)		分割数: 2	
		不等: 1	
エッジ2.4		分割数: 2	
		不等: 1	
要素: 1		カーブ: 4	
円弧使用 N: 200		①	
α: 0.3		②	
		③	
		④	
リセット		分割/カーブ変換	
		中止	

B. 作成された要素の節点は要素間でつながっていない部分があるため「節点マージ」でつながりあわせます。「許容値」とは重なったと判断される節点間の距離です。なお、いくつかの要素を同時に選択して分割すると、生成節点は自動的にマージされます。節点をマージしたあと、「要素クリーン」で要素の表裏修正、二重要素削除、0面積要素の削除を行います。

C. 「カーブへの移動」、「節点のストレッチ」、「節点のスミージング」等で節点位置を修正して最終形状とします。


要素	物性値	境界条件	データ読込
作成	編集	オートメッシュ	オプション
■節点の移動 / 要素コピー			
リセット		基準点:  1	
基準点x:		0	
基準点y:		0	
回転 $\Delta \theta$:		0	
並行移動 Δx :		0	
Δy :		0	
拡大倍率Mx:		1	
(節点移動) My:		1	
節点移動			
xシメトリ		yシメトリ	
マージ		1	
繰返し数:		1	
要素コピー			
■節点位置の修正			
ドラッグで移動		節点:  1	
カーブへの移動			
最短方向		x方向	
y方向			
カーブ:		 1	
節点:		移動 	
節点のストレッチ			
ストレッチ		 1	
節点のスモーキング			
スモーキング回数:		10	
アウトライン		スモーキング 	

[オートメッシュについて]

PolarFEMのオートメッシュは**デローニー三角分割**(Delaunay Triangulation)によるものです。カーブのシード点をすべて含む大きな1つの三角形から出発して、まずシード点の位置に節点を有する三角形を作成(境界を確定)します。引き続いて内部に新たな節点を生成しながら細かく分割し、最後に不要な三角形を取り除きます。四角形メッシュはデローニー三角分割で得られた三角形を再度分割/合体させて作成されます。外部境界として、端点が順次つながった複数のカーブによって1つの閉領域を指定(設定)します。他に外部境界がある場合も同様に指定し、同時に複数の閉領域を指定することができます。複数の閉領域はリストボックスにリストとして表示されます。内部境界も外部境界と同様にして指定します。

[マウスの操作方法]

・選択操作

 (矢印ボタン)を左クリックすると、矢印ボタンが緑色に変化します(選択モード開始)。引き続いて、プロット画面上で要素・節点等の選択操作を行うと、矢印ボタンが水色に変化し(もしくは次の選択項目に移動し)、プロット画面上の選択された部分が黄色(位置指示の場

合は赤色)で表示されます。その後、パネルにて「設定ボタン」等をクリックするとその選択条件が設定あるいは実行されます(→選択モード終了)。

・**範囲選択**(節点、要素、エッジ、カーブの選択を行うモードの場合)

左ドラッグによって、要素、節点、あるいはカーブを囲むことで範囲選択ができます。範囲選択後、引き続き選択操作が可能です。単一の節点あるいは単一のカーブを選択する必要がある場合は動作しません(「1」の添字のある矢印ボタンの場合、左クリックのみ有効)。

・**領域選択**(節点、要素、エッジ、カーブの選択を行うモードの場合)

連続した ctrl+左クリックによって、要素、節点、あるいはカーブを囲むことで領域選択ができます。クリックした始点と終点が一致した場合、選択が確定します。領域選択途中で ctrl を離しても、再び ctrl を押せば領域選択を続行できます。領域選択後、引き続き選択操作が可能です。単一の節点あるいは単一のカーブを選択する必要がある場合は動作しません(「1」の添字のある矢印ボタンの場合、左クリックのみ有効)。

・**選択操作を戻す**

ほとんどの場合、プロット画面上で右クリックすることで選択操作を1つずつ戻すことができます(→最後は全て解除)。戻した後、全て解除されていない状態の場合は引き続いて選択操作ができます。

・**選択の解除**

ほとんどの場合、shift+左クリック、あるいは、shift+左ドラッグによって、すでに選択された部分の一部を解除することができます。解除後、引き続いて選択操作ができます。直ちに全ての選択モードを解除するには、中央クリックまたは「FEM-選択モードの解除」を用います。また、別の選択項目矢印ボタンをクリックすると、一旦、直前の選択モードが解除・終了されたのち、あらたな選択モードの開始状態になります。

・**端点位置取得**(画面上の位置を指定するモードの場合)

ほとんどの場合、ctrl+左クリックによって、節点あるいは図形の端点位置を取得することができます。ctrl を押している間、グリッドスナップは無効になります。マウスカーソルの付近に節点あるいは端点がない場合は、ctrl+左クリックしても選択が行われません。ctrl を離すことで通常の選択動作になります。ctrl+左クリックは、すでに存在する節点位置やカーブ端点を用いてあらたに座標を指定するケースに使用すると便利です。

・**選択項目の移動**

円弧作成の場合のように、いくつかの設定項目では、ある選択を完了したのち次に必要な選択項目に自動的に移動します。また、再帰的に選択項目が移動し続けるものもあります。途中で特定の選択項目のみを入力する必要があるときは、その項目を直接選択することで入力できます。なお、プロット画面のカーソルで取得した数値がテキスト入力ボックス(textBox)に反映される場合は、テキストボックスの表示値が設定実行時に使用されます(正確に入力するにはテキストボックスに直接数値を入力します)。

・**拡大、縮小、移動**

全て「解除」された状態で、左ドラッグすることによって拡大(下方にドラッグ)・縮小(上方にドラッグ)ができます。常時、右ドラッグで移動ができます。右ドラッグによる移動は選択操作途中でも可能です(移動後、再び選択操作に戻ります)。なお、マウスホイールにも拡大・縮小(ctrl+回転)、移動(そのまま回転、shift+回転)が割り当ててあります。

・**範囲拡大**

ビューツールの「範囲拡大ボタン」をクリックした後、左ドラッグすることによって範囲選択した領域を拡大できます。範囲拡大は選択操作途中でも可能です。範囲拡大後、再び選択操作に戻ります。範囲拡大は1回の操作のみ可能です。

* 左クリック:プロット画面上でマウスの左ボタンをクリック、右クリック:マウスの右ボタンをクリック、中央クリック:マウスの中央ボタンをクリック、左ドラッグ:マウスの左ボタンを押したままドラッグ、shift+左クリック:shift キーを押した状態でマウスの左ボタンをクリック、shift+左ドラッグ:shift キーを押した状態でマウスの左ボタンを押したままドラッグ、ctrl+左クリック:ctrl

キーを押した状態でマウスの左ボタンをクリック、右ドラッグ：マウスの右ボタンを押したままドラッグ

3-2. 物性値の入力

- A. 材料(Material)の番号、ヤング率(Young's Modulus)、ポアソン比(Poisson's Ratio)、板厚(Thickness)などを入力して材料の「定義」を行います。要素毎に異なった値でも可能。
- B. 定義した材料特性を要素に与えます。変形計算の場合はメカニカル物性値を、熱伝導計算では熱伝導物性値を与えます。いずれの場合もすべての要素に与えなければなりません。ピエゾ物性値はすべての要素に与える必要はありません。

要素	物性値	境界条件	データ読込
■メカニカル物性値 × NO.定義値表示			
材料NO:	1		
ヤング率E:	2.100E+011		
ポアソン比 ν :	3.000E-001		
板厚t:	1.000E-002		
質量m:	7.850E+003		
熱膨張係数 β :	1.170E-005		
定義	定義数: 1		
要素設定	削除		
全要素設定	全設定削除		
■熱伝導物性値 □ NO.定義値表示			
材料NO:	1		
熱伝導率 k_x :	5.200E+001		
熱伝導率 k_y :	5.200E+001		
定義	定義数: 1		
要素設定	削除		
全要素設定	全設定削除		
■ピエゾ物性値 P NO.定義値表示			
材料NO:	1		
d31:	-1.950E-010		
d33:	3.600E-010		
d15:	6.800E-010		
定義	定義数: 1		
要素設定	削除		
全要素設定	全設定削除		

3-3. 拘束(変位)条件の設定

節点に変位を与えます。x方向あるいはy方向の変位を0とした場合には、x軸方向あるいはy軸方向に関する**拘束(対称)条件**を設定したことになります。また、両方向の変位を0とした場合は

完全拘束にしたことになります(節点まわりの回転は拘束されない)。タイイング(Nodal Tie)を用いて節点間の自由度(Uまたは V,Freedom)を拘束することで対称条件(Symmetry)とさせることもできます(備考:タイイングは剛性マトリックスのバンド幅を増大させるため計算時間がやや長くなります)。

3-4. 荷重条件の設定

節点に荷重を加えます。荷重はx成分とy成分に分けて入力します。**圧力**(Pressure,Shear)・**体積力**(Body Force)を設定(相当荷重を**加算**)することも可能。(本プログラムではモデル作成時点で圧力や体積力を荷重に加算しますので、注意深く設定する必要があります。なお、2次要素におけるそれらの荷重は、エッジで不揃いになり一見不自然のようにも見えますが、2次補間された等価的な節点荷重を直接表示していることによるものです。)

要素	物性値	境界条件	データ読込
拘束/荷重 温度/発熱			
■ 節点拘束条件			
		全拘束削除	
変位x成分		0.000E+000	
変位y成分		0.000E+000	
設定		削除	
■ 節点のタイイング			
		全タイイング削除	
変位U拘束		変位V拘束	
設定		削除	
(1→N)			
■ 節点荷重条件			
		全荷重削除	
荷重x成分:		0.000E+000	
荷重y成分:		0.000E+000	
設定		削除	
■ エッジ圧力(アウトライン)			
		軸対称	
エッジ垂直圧力P:		0.000E+000	
エッジ接線圧力S:		0.000E+000	
設定		加算	
■ 要素体積力			
平面問題		軸対称問題	
体積力		y体積力	遠心力
加速度x成分:		0.000E+000	
加速度y成分:		-9.800E+000	
回転数(c/sec):		0.000E+000	
設定		加算	

[描画/取消に関して]

1.「**再描画**」(ビューツール)を行うことで、入力後の形状を最新表示することができます。

2.モデルの実寸法は要素を作成した時点の座標値によって決まります。「描画スケール」はモデル描画のみに適用されます。実寸法に1/描画スケールをかけた値で画面描画を行います。例えば、描画スケール=0.01の場合、リセット(Zoom=1倍)した画面座標の範囲(=グリッド表示範囲)は0~0.01(もしくは-0.005~0.005)になります。最適な「描画スケール」は描画誤差を最小にすることができるため、モデル毎に設定しておくことを推奨します(「表示-表示設定-オプション-描画スケール」)。

3.表示関係と計算実行関係の操作を除き、ほとんどの場合、「FEM-設定の取消」によって操作直前の状態に復元することができます(1回のみ)。重大なエラーが発生した場合、あるいはアプリケーションが強制的に「取消」を実行した場合は直前の状態に戻すことはできません。

4. 変形・応力の計算

■計算タイプ

平面応力

平面ひずみ

軸対称

自動節点並び換え

静計算

過渡

調和

固有値

数値出力

■変形計算

計算実行

中止

熱応力on

ピエゾon

分極

分極解除

熱応力温度設定

設定温度クリア

熱伝導結果 >> T0

熱伝導結果 >> T

ピエゾ電界リミット

1.000E+030

■熱伝導計算

計算実行

中止

分極計算on

分極クリア

分極開始電界:

0.000E+000

分極終了電界:

0.000E+000

一定電界Ey設定

0.000E+000

■ピエゾ連成計算(変形-電場) * 要分極計算

計算実行

0

中止

繰り返し数:

5

計算進捗状況 ☐ 変形 ☐ 熱伝導 ☐ 固有値

☐ 節点並び換え

☐ 境界条件設定1

☐ 剛性マトリックス作成

☐ 境界条件設定2

連立方程式ソルバー:

☐ ポスト処理

cpu:

クリア

終了:

変形・応力の計算は次の順序で行われます。

4-1. バンド幅

計算規模を小さくするためにマトリックスの実質の幅を調べ最小サイズの状態です。剛性マトリックスの対角から離れた部分では成分が0となる項が多く、それらを除いた後のマトリックス幅の最大値すなわち**バンド幅**(Band Width)を調べます。

＊「節点番号の並び替え(Renumber)」を行うことでバンド幅が縮小し、計算時間の短縮が可能です(本アプリケーションでは自動処理がデフォルト)

4-2. 剛性マトリックスの組み立て

要素1つ1つの**剛性マトリックス**[K]_e(Element Stiffness Matrix)を次式で求めます。積分は**ガウス積分**(=Σ(重み×積分点での値), Gauss-Legendre Numerical Integration)で求めます。

$$[K]_e = t \iint [B]_e^T [D]_e [B]_e dx dy$$

ただし、 $\{\varepsilon\}_e = [B]_e \{u\}_e$, $\{\sigma\}_e = [D]_e \{\varepsilon\}_e$
[B]は **B マトリックス**(変位-ひずみの関係)
[D]は **D マトリックス**(応力-ひずみの関係)

全節点に対して[K]_eを加え合わせて**全体剛性マトリックス**[K](Total Stiffness Matrix)を作成します。

$$[K] = \sum [K]_e$$

4-3. 拘束条件の設定

[K]のマトリックスの成分の中で拘束した節点に対応した成分の行と列の値を固定します。

4-4. 剛性方程式の求解

$$[K]\{u\} = \{f\} \quad \text{ただし、}\{f\}\text{は節点に加える外力}$$

上式の連立方程式を解けば[u]が求められます。熱膨張がある場合は{f}に熱ひずみの等価荷重(Equivalent Nodal Force)を加え、ピエゾ応力計算時には{f}にピエゾひずみの等価荷重を異方性(Anisotropic)をもたせて加えます(下記)。

4-5. 求めた[u]からひずみ{ε}と応力{σ}を求めます(上記4-2の式より)

4-6. ピエゾ素子応力計算(内部電界→ピエゾ応力)

ピエゾ素子応力計算は、通常の構造解析における熱膨張(Thermal Expansion)と同じ考え方で、(d 定数^T×電界)によって与えられる異方性線膨張があるとみなして計算しています。すなわち、ひずみ=(外力によるひずみ)+d^TE、E: 電界、と考え、要素のひずみ増加 {d^TE}に相当する等価荷重{f}を 節点に与えて変位を計算しています。

＊「分極」計算を行わず、単にピエゾ計算を実行した場合には、直前の電界計算結果を分極とみなして処理されます。

5. 熱伝導・電場の計算

熱伝導(Heat Transfer)・電場(Electrostatic Field)の計算は次の順序で行われます。

5-1. バンド幅

変形・応力計算と同様にバンド幅を調べます。扱う変数(自由度)が、変形・応力計算時では変位 u, v の2つであるのに対し、熱伝導・電界計算時では温度 T の1つに減るため、熱伝導・電界計算時のバンド幅は変形・応力計算時の半分程度になります。

熱伝導・電界計算時は、下記の全体剛性マトリックスの規模も $1/2^2=1/4$ (2D) 程度となります。

5-2. 剛性マトリックスの組み立て

変形・応力計算と同様にして、要素1つ1つの剛性マトリックス $[K]_e$ を次式で求めます。 $\{u\}$ は温度あるいは電圧値、 $\{\varepsilon\}$ は温度勾配あるいは(－電界)です。 $\{\sigma\}$ は熱流束あるいは電束密度です。

$$[K]_e = t \iint [B]_e^T [D]_e [B]_e dx dy$$

ただし、 $\{\varepsilon\}_e = [B]_e \{u\}_e$, $\{\sigma\}_e = [D]_e \{\varepsilon\}_e$

応力計算時には $[D]$ が応力-ひずみの関係であったのに対し、熱伝導計算では $[D]$ が熱伝導率マトリックスに、電界計算では誘電率マトリックスに置き換わります。全節点に対して $[K]_e$ を加え合わせて全体剛性マトリックス $[K]$ を作成します。

$$[K] = \sum [K]_e$$

なお、熱伝導計算の剛性マトリックス $[K]_e$ は、境界での熱伝達項 $[Kc]_e$ を考慮した $[K]_e$ とします。

$$[K]_e = [K]_e + [Kc]_e$$

5-3. 拘束条件の設定

$[K]$ のマトリックスの成分の中で温度あるいは電圧を拘束した(一定値とした)節点に対応した成分の行と列の値を固定します。

5-4. 剛性方程式の求解

$$[K]\{u\} = \{f\} = \{q_0\} + \{q\} + \{q_c\}$$

ただし、 $\{f\}$ は節点に加える熱量あるいは電荷です。熱伝導計算では、 $\{q_0\}$ は要素発熱、 $\{q\}$ は境界からの流入熱量、 $\{q_c\}$ は熱伝達項です。一般の電場計算で、外部電荷がない場合は、

$$[K]\{u\} = 0$$

なる剛性方程式を解きます。上式の連立方程式をそれぞれ解けば $\{u\}$ が求められます。

5-5. 求めた $\{u\}$ から $\{\varepsilon\}$ を求めます

ピエゾ応力計算時には、計算された $\{\varepsilon\}$ は(一電界)としてピエゾ応力計算に用いられます。

6. 計算結果のプロット

NO: << 前 0 次 >>

■変形拡大

OFF 自動 マニュアル

拡大率 0 1

原形状

■コンター図

コンター図 等高線 >>要素平均

線サイズ: 1

シンボル円 円サイズ: 1

数値 単色 **プロット**

スカラー (カラー) 軸対称 xyz→rz θ

u	v	U	Δt
ε_x	ε_y	ε_z	γ_{xy}
σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}
σ_1	σ_2	σ_M	ΔT
T	T'x	T'y	T'
OFF	Qx	Qy	Q

スケール

スケール コメント 自動 マニュアル

Max: 0 0

Min: 0 0

■ベクトル図

U	T'	Q	分極
---	----	---	----

ベクトルの大きさ: 1

矢の大きさ: 0.4

線サイズ: 1

OFF 同一サイズ **プロット**

6-1. 番号・材料・荷重・拘束条件などのプロット

諸番号・材料・荷重・拘束条件などは(デフォルト設定では表示 OFF になっています)、「表示」→「表示設定」→「プロットシンボル」にて設定したあとプロットします。モデル作成画面と計算結果プロット画面では別の表示設定になっています。また、アウトラインを恒久的に使用する場合や、プリンターにアウトライン図を出力する場合は同表示設定を「アウトライン」に設定しておく必要があります。変形形状のプロットでは変位の**拡大率**をマニュアルで変更できます。

6-2. コンター図、ベクトル図のプロット

各種成分あるいはスカラーの値をコンター図(等高線)でプロットします。また、変位、温度勾配、分極はベクトル図でプロットできます。スカラーの記号は以下のとおりです。

u: 変位x成分 (Displacement u)
v: 変位y成分 (Displacement v)
|U|: 変位の大きさ(絶対値) (Displacement |U|)
 Δt : 板厚の変化分 (Δ Thickness Δt)
 ε_x : x 方向垂直ひずみ (Strain ε_x)
 ε_y : y 方向垂直ひずみ (Strain ε_y)
 ε_z : z 方向垂直ひずみ (Strain ε_z)
 γ_{xy} : せん断ひずみ (Strain γ_{xy})
 σ_x : x 方向垂直応力 (Stress σ_x)
 σ_y : y 方向垂直応力 (Stress σ_y)
 σ_z : z 方向垂直応力 (Stress σ_z)
 τ_{xy} : せん断応力 (Stress τ_{xy})
 σ_1 : 主応力 1 (Stress σ_1)
 σ_2 : 主応力 2 (Stress σ_2)
 σ_M : ミーゼス応力 (Stress σ_M)
 ΔT : 温度差(要素設定値) (Δ Temperature ΔT)
T: 温度(節点計算結果) (Temperature T)
 T'_x : T の x 方向勾配 (Temperature Gradient T'_x)
 T'_y : T の y 方向勾配 (Temperature Gradient T'_y)
 $|T'|$: T の勾配の大きさ(絶対値) (Temperature Gradient $|T'|$)
平面応力問題では $\sigma_z=0$ 、平面ひずみ問題では $\varepsilon_z=0$ です。
軸対称問題の場合は $x,y,z \rightarrow r,z, \theta$ と読み直してください。

6-3. 印刷、クリップボードにコピー、BMP 保存

プロットした図をプリンタに出力することができます。印刷を行うには、あらかじめ必要な図を画面に表示させておき、その後に、「ファイル-印刷...」で印刷パネルを開きます。プリンタの設定を確認した後、印刷を実行します。印刷の際には、バックがつねに「白色」となります。画面イメージをクリップボードにコピー、あるいは一旦、画面イメージをファイルに保存することで、他のアプリケーションから BMP として取り込むことができます。ファイルの拡張子を変えて保存することで、フォーマットの異なる BMP として保存できます。イメージでは画面のピクセルがそのまま(あるいは圧縮されて)維持されます。

7. 熱伝導計算と電界計算のアナロジー

[熱伝導の支配方程式]

定常状態(時間的に変化しない状態)での物体内の温度場は次式で表されます。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{Q}_T = 0$$

(1)

ここに、T は温度、k は熱伝導率、 \dot{Q}_T は発熱

この式は、x方向の温度勾配による熱伝導熱量および y 方向の温度勾配による熱伝導熱量の和（出入熱量）が発熱量とつりあっていることを意味しています。一般的に、こういった関係式は、勾配(Gradient)に比例して流束（フラックス,Flux）が決まるため**拡散方程式**(Diffusion Equation)と呼ばれています。

[電場の支配方程式]

誘電体内の**ガウスの定理**(Gauss' Theorem)から、面積積分を体積積分に変えて、次式が成り立ちます。

$$\int_S \mathbf{D}_n dS = Q_e \quad \therefore \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = Q_e \quad (2)$$

ここに、D は電束密度ベクトル、 Q_e は電荷

電界ベクトル E は、

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon \text{grad} \phi$$

ここに、 ϵ は誘電率、 ϕ は電位

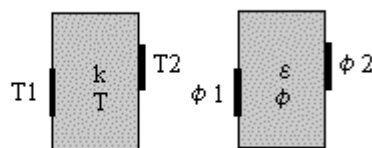
なる関係があるので、(2)式は単位体積あたりを考えて次のようになります。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \dot{Q}_e = 0 \quad (3)$$

[熱伝導と電界のアナロジー]

(1)式と(3)式は同一の形をしています。したがって、下表のように変数を対応させることでアナロジー的な使い方ができます。

熱伝導計算時	電界計算時
温度 T	電位(ポテンシャル) ϕ
熱伝導率 k	誘電率 ϵ
- 温度勾配 $-\text{grad}T$	電界 \mathbf{E}
熱流束 \mathbf{q}	電束密度 \mathbf{D}
発熱 Q_i	電荷 Q_e



熱伝導計算は、さらにアナロジーを拡張して、拡散、電流、磁場などにも適用することが可能です。

8. ピエゾ連成静計算

[圧電方程式と一般的解法]

ピエゾ内のひずみと応力・電界の関係、電束密度と応力・電界の関係は次の**圧電方程式**(Piezoelectric Equation)として表されます。

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{s}^E \mathbf{T} + \mathbf{d}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{d} \mathbf{T} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 \mathbf{S} はひずみベクトル、 \mathbf{T} は応力ベクトル、 \mathbf{D} は電束密度ベクトル、 \mathbf{E} は電界ベクトル
 \mathbf{s}^E はコンプライアンステンソル、 \mathbf{d} は圧電ひずみ定数マトリックス、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は誘電率テンソル

一般的には、上二式の結合解を求めるのに、変位に対する剛性方程式と電位に対する剛性方程式を重ね合わせて、次のような拡張された剛性方程式を1回のプロセスで解く方法がとられています。第1行は変位、第2行は電位に関する式となっています。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}] & [\mathbf{K}_{u\phi}] \\ [\mathbf{K}_{u\phi}]^T & [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (2)$$

しかし、(1)式は分極ベクトルが同一方向に揃っている場合のみに適用可能で、異なる場合は何らかの工夫が必要です。

[反復法による連成]

本プログラムでは(1)式を次のように解釈しなおして、反復計算する手法をとっています。

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{s}^E \mathbf{T} + \Delta \mathbf{S} \quad (\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \mathbf{S} - \mathbf{c}^E \Delta \mathbf{S}) \quad , \quad \Delta \mathbf{S} = \mathbf{d}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} + \Delta \mathbf{D} \quad , \quad \Delta \mathbf{D} = \mathbf{d} \mathbf{T} \end{aligned} \quad (3)$$

すなわち、次の繰り返しステップで連成計算を行っています。離散化して連立方程式を解く方法は通常の方法を用いています。

1. 与えられた電極電圧より電位分布・電界を計算する(最初は $\Delta \mathbf{D}=0$ とする)。
2. 求められた電界 \mathbf{E} からひずみの修正分 $\Delta \mathbf{S}$ を求め、その等価荷重を与えることで、変位・ひずみ・応力を計算する。この時点で、圧電ひずみを考慮した場合の応力近似値が得られます。
3. 求められた応力 \mathbf{T} から電束密度の修正分 $\Delta \mathbf{D}$ を求め、その等価電荷を与えることで、電位・電界を求める。この時点で、圧電内の電荷発生を考慮した場合の電界近似値が得られます。
4. 1～3を繰り返す。

本手法は、ひずみの修正分 $\Delta \mathbf{S}$ を求める際に、分極の影響を座標変換あるいは大きさ変更によって容易に取り込めるため、分極の方向および大きさ(非線形でも可)を考慮した場合の**簡明な連成計算(Couple)**を可能にしています。

* ここでの変数名はテンソル表記での慣用変数名を用いています。例えば、 \mathbf{c}^E は FEM の \mathbf{D} マトリックスに相当します。

* 「圧電連成計算」では、あらかじめ分極を計算しておく必要があります。

9. 圧電連成動計算

ピエゾ連成動計算は、静的なピエゾ連成計算と同様な手法を用い、変形と電界の交互反復計算を短い時間刻みで進め、時間を進める中で質量(Mass)と減衰(Damping)を考慮しながら計算する手法を用いています。ピエゾ内の電界は静的に(Static)計算され、変形が動的に(Dynamic)計算されます。

変形を動的に計算する方法としてニューマーク(Newmark)の β 法を用いています。ニューマークの β 法では、パラメータ β 、 γ を定義し、現計算ステップから次の計算ステップの変位、速度、加速度を予測しながら計算を進めます。現在の変位ベクトル、速度ベクトル、加速度ベクトル、および、次のステップの変位ベクトル、速度ベクトル、加速度ベクトルを、

$$u^n, \dot{u}^n, \ddot{u}^n \quad u^{n+1}, \dot{u}^{n+1}, \ddot{u}^{n+1}$$

として、

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \Delta t \dot{u}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}^n + \beta \Delta t^2 (\ddot{u}^{n+1} - \ddot{u}^n) \\ \dot{u}^{n+1} &= \dot{u}^n + ((1-\gamma)\ddot{u}^n + \gamma\ddot{u}^{n+1})\Delta t \end{aligned}$$

と近似します。次のステップの運動方程式は、

$$M\ddot{u}^{n+1} + C\dot{u}^{n+1} + Ku^{n+1} = f^{n+1}$$

ここに、

M : 質量マトリックス(Mass Matrix)

C : 減衰マトリックス(= CM×M + CK×K と仮定, 比例減衰)(Damping Matrix)

K : 剛性マトリックス (Stiffness Matrix)

f : 節点荷重ベクトル (Nodal Force Vector)

と表されるので、次式を導くことができます。

$$\begin{aligned} \left(K + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} C + \frac{1}{\beta\Delta t^2} M \right) u^{n+1} &= f^{n+1} + M \left(\left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u}^n + \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{u}^n + u^n \right) \\ &\quad + C \left(\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{u}^n + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{u}^n + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} u^n \right) \end{aligned}$$

上式の右辺は荷重条件および前ステップ計算結果より既知であるので、上式は次のステップの変位に関する連立方程式となっています。各時間ステップで上式を解きながら、時間を進めることで動的な変形が計算できます。

パラメータ β は通常 1/6～1/4 の間で設定されます。動計算は、計算が発散する危険性を擁していますが、 $\beta > 1/4$ で無条件安定となることが知られています。精度が要求される場合(数値減衰を押さえる場合)は $\beta = 1/6$ 程度まで小さくします。 γ は通常 1/2 が使用されます。

動計算をする際は、材料の減衰係数を設定しておく不要(異常)な振動を小さくすることができます。減衰係数は FEM でよく使用される比例減衰(レーリー減衰)、すなわち質量マトリックスと剛性マトリックスの線形和、として入力します。減衰 C マトリックス=CM×質量マトリックス+CK×剛性マトリックス。比例減衰係数と振動工学などで使用される減衰比(臨界減衰係数との比, 無次元量, Damping Ratio) ζ との間には、 $2\zeta i \omega_i = CM + (\omega_i \omega_i) \times CK$ の関係があります(i はモード次数)。共振 Q 値=1/(2 ζ)。比例減衰では ζ は周波数によって大きく変わります。CM, CK を[設定パネル]で求めた値とした場合、 $f_1 < f_2$ および $\zeta > 0$ として、 f_1 以下あるいは f_2 以上の周波数では ζ は $f_1(f_2)$ の ζ より大きくなり、 f_1 と f_2 の間に ζ の最小値がある傾向になります。CM→大では粘性減衰, CK→

大では構造減衰の様相を呈します。なお、パネルでの「f, $\zeta \rightarrow$ CM, CK 計算」はあくまでも目安(参考値)を計算するものです。

動計算では、上記連立方程式に見られるように、剛性方程式の係数(左辺)に質量項と減衰項が加わるため、拘束条件のない状態での計算も可能です。しかし、**微小変形**を仮定した線形計算であるため、非常に大きな変位あるいは変形となる場合は正しい結果が得られません。また、大きな剛体回転を伴う微小変形では正しく拡大表示できません(拡大表示の原理的なものであり、静計算でも同様です)。

変形計算と交互になされるピエゾ内の電界計算は静的な場合と全く同一な方法で行われます。

ピエゾ連成動計算をする前にあらかじめピエゾの**分極計算**をしておく必要があります。分極計算を省略した場合は前計算ステップの電界計算結果を分極とみなして処理されます。また、節点電位(温度)の設定がない場合、あるいは、要素に d 定数の設定がない場合は変形の動計算のみが有効になります。(メカニカルな単なる動計算として使用可能。)

動計算の荷重は「**荷重係数**」によって与えます。[モデル作成]にて静計算と同様に与えられた「荷重」値に、時間的に変化する矩形波またはサイン波の「荷重係数」(関数)を乗じ、さらにシフト量を加算した値が動的な「荷重」として使われます。荷重はバースト波として与えることも可能です。

10. 熱過渡計算

熱過渡計算も次のステップの温度を予測することで計算されます。現在の温度ベクトル、温度変化ベクトルおよび、次のステップの温度ベクトル、温度変化ベクトルを、

$$T^n, \dot{T}^n \quad T^{n+1}, \dot{T}^{n+1}$$

として、パラメータ θ を用いて、

$$T^{n+\theta} = (1 - \theta)T^n + \theta T^{n+1}$$
$$\dot{T}^{n+\theta} = \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t}$$

と近似します。次のステップの熱伝導の式は、

$$\left(\frac{C}{\Delta t} + \theta K \right) T^{n+1} = Q^{n+1} + \left(\frac{C}{\Delta t} - (1 - \theta)K \right) T^n$$

ここに、

C : 熱容量(ρC_p)マトリックス

K : 熱剛性マトリックス

Q : 節点熱量

と導かれます。パラメータ θ が 0 のとき**前進差分近似**、 θ が 1 のとき**後退差分近似**、 θ が 1/2 のとき**クランクニコルソンの方法**と呼ばれています。後退差分近似の安定性がもっとも高いと言われています。

熱過渡計算の「荷重」(温度, 熱量)も動計算と同様に「荷重係数」によって与えます。

11. 調和応答計算

調和応答(Harmonic Response)計算によって、加える荷重が正弦波であると仮定したときのおおむねの共振周波数とそのときの変形モードを知ることができます。荷重の時間的変化を正弦波 $\sin \omega t$ とすると、減衰がない場合、変位や加速度も荷重にしたがって変化します。そして、剛性方程

式(運動方程式)は静変形計算の剛性方程式に質量の影響する慣性項 $-\omega^2 M$ を付加するのみの形になります。

$$(K - \omega^2 M)u = f$$

従って、周波数($=\omega/(2\pi)$)をある値から順に変化させて(すなわち慣性項 $-\omega^2 M$ を徐々に変化させて)繰り返し連続的に計算することで、ある周波数範囲の共振状態を把握することが出来ます。実際の計算においては、初回に剛性マトリックスK および質量マトリックス M を作成して解を求め、以後の計算ではK および M は作成せず ω のみを変えて計算しています。

本プログラムの調和応答計算は次項の固有値計算と同様に減衰を考慮していません。本プログラムでは、減衰の大きさが影響してくる共振周波数近傍での振幅を正確に求めることはできません。共振周波数に関しては、減衰が極端に小さくなければ、減衰項を考慮しなくても相応の結果が得られます。ピエゾ調和応答計算を行った場合、共振周波数近傍では生成される電荷量も振動の大きさに応じてかなりの量になるため、場合によっては、異常に高い電位分布となります。振幅の場合と同様に、減衰を考慮していないため、共振周波数近傍の電位の大きさも正確に求めることはできません。

ピエゾ調和応答計算は電界計算と変形計算の繰り返しによって計算されます。すなわち、電場(電束密度)→変形(応力)→電場(電束密度)…の反復で計算されます。なお、ピエゾを考慮した調和応答計算は計算が不安定(疑似共振モードの出現)になるケースがあります。計算が不安定となった場合は、概して、「ピエゾ連成繰り返し数」を必要最低限の回数にとどめて計算すると比較的穏やかな結果が得られる傾向にあります。ピエゾ調和応答計算では共振周波数に関する若干の吟味が必要であり、共振周波数近傍の振幅の値も参考値として見る必要があります。

ピエゾ連成動計算と同様に、ピエゾ関連の設定(節点電位、d 定数)を行った場合は自動的にピエゾ計算になります。ピエゾ関連の設定を省略した場合は、変形計算のみが行われます。(メカニカルな単なる調和応答計算として使用可能。)

12. 固有値計算

本プログラムでは逆べき乗法(Inverse Power Method)を用いています。2D および軸対称問題を対象にしていますので、逆べき乗法によって低い次数から順次固有値(Eigen Value)を求めていく方法でも十分に実用可能です。逆べき乗法は連立一次方程式(標準固有値問題, Normal Eigenvalue Problem の場合)、

$$Ax = \lambda x$$

ここに、

A : マトリックス

λ : 固有値($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$)

x : 固有ベクトル (Eigen Vector)

の解を求めるために、次の反復計算を行うと、

$$x_{n+1} = A^{-1}x_n$$

次第に、最小固有値がレーリー商の逆数に近づく性質を用いた手法です。

$$\lambda \approx \frac{\frac{F}{x_n} x_n}{\frac{F}{x_n} x_{n+1}}$$

具体的には、「**一般的固有値問題**,General Eigenvalue Problem」として、既知の固有ベクトル成分除去を行いながら、次式を反復して解いています。

$$Ku_{n+1} = Mu_n$$

逆べき乗法による固有値計算は実質的には単純な剛性方程式を解いていること(静計算)と同等になるため、十分な拘束を与えて**剛体変位**の発生を防がなければなりません。しかし、どうしても拘束条件を設定できない場合(剛性マトリックスが逆行列の存在しない**特異な**マトリックス(Singular Matrix)となる場合)は、「特異マトリックス修正」の値を注意深く選定することで解を得ることが可能です。ただし、この場合には、いくつかの無意味な剛体モード変位が解に混じってきます。ここでの「特異マトリックス修正」は、特異な剛性マトリックスに $\alpha \times$ 質量マトリックスを加算して特異性をなくす**シフト操作**を意味します。本プログラムでは、 $\alpha = [\text{特異マトリックス修正値}] \times [\text{トータル K}] / [\text{トータル M}]$ としています。十分な拘束が与えられた場合は「特異マトリックス修正」は行われません。

逆べき乗法では反復計算を用いているため、計算途中にて**収束判定**(Convergence Testing)を行います。本プログラムでは、ある反復にて求めた固有値と前回の反復で求めた固有値の変化が「収束判定値」以下になったときに計算を打ち切っています。「最大反復数」は計算時間の制限を設けるために設定しますが、「最大反復数」まで達した場合は回数を増やして再度計算し直す必要があります。

剛性マトリックスを作成する際に同時に質量マトリックスも作成しますが、質量マトリックスを対角成分のみにした「**集中質量**(Lumped Mass)」として作成する方法をデフォルトにしています。「集中質量」は、FEM 的にマトリックスを組み上げたいわゆる「**分布質量**(Consistent Mass)」として作成した場合に比べ、マトリックスの計算量が減るため、計算時間が相当量短縮されます。ただし、固有値の値に若干の相違が生じます。(備考:ピエゾ連成動計算およびピエゾ連成調和応答計算では分布質量を用いています。)

本プログラムでは 2D および軸対称問題を対象にしていますので、計算結果を見るに当たって、平面問題では、面(xy)に垂直な「膜振動モード」などが除去されている点に留意する必要があります。また、軸対称問題では軸に関する「ねじり、曲げモード」などが除去されています。通常、それらの除去された固有値は求めた固有値の近傍周波数にありますので十分な考察を行ってください。

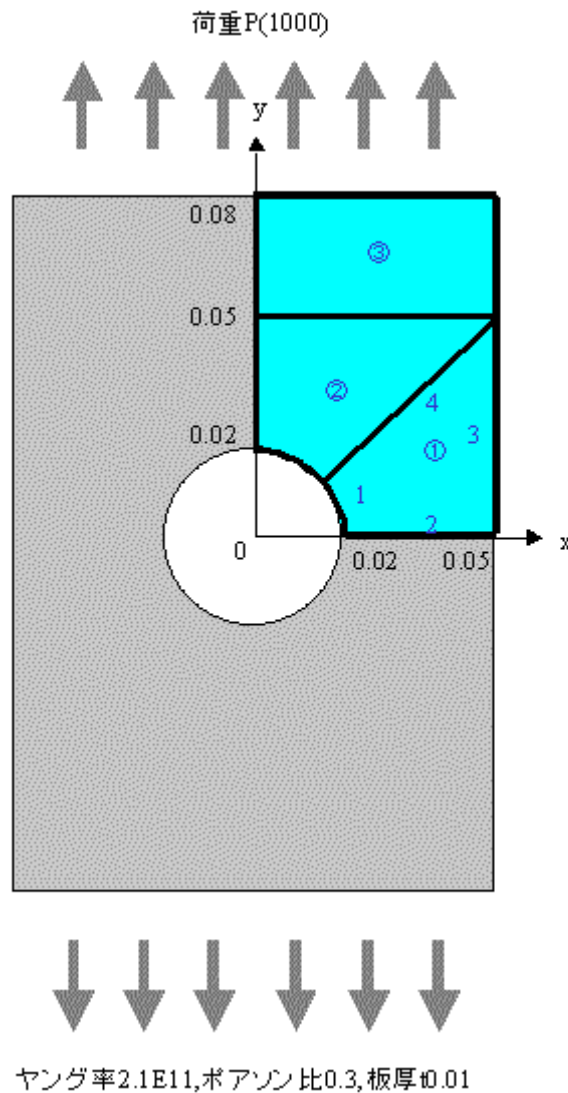
現在、固有値計算では、ピエゾの圧電効果および減衰を考慮していません。

13. 計算例

* 計算例サンプルファイルは<ホルダ PolarFEM500¥計算例¥>にあります。

13-1. 計算例 **変形・応力** (サンプルファイル:plate4.mdl , 計算結果 plate4.out)

中央に穴のあいた薄肉平板を上下に引っ張ったときの変形と応力を求めます。



解析手順

[要素の作成]

1. 対称性を考えて 1/4 モデルとし、解析領域(青)を①～③の3つの領域に分割して考えます。
2. 領域①の4辺のカーブを描きます。(あらかじめ「表示-表示設定-オプション」で描画スケールを 0.1 に設定しておきます)
 - 45度円弧 1(カーブ 1) → 直線 2 → 直線 3 → 直線 4(端点接続)
 - * **ctl**キーを押しながらカーブの端点付近を左クリックすると端点接続(端点位置を取得)できます
3. 領域①を要素群に変換します。
 - カーブ 1 に円弧 1 を指定: 5分割(不等 1)
 - カーブ 2 に直線 2 を指定: 5分割(不等 1.2)
 - カーブ 3 に直線 3 を指定
 - カーブ 4 に直線 4 を指定
4. 同様に領域②, ③(5 × 3分割, 不等 1)についても 2～3 の手順を繰り返します。
5. 全節点をマージします(自動-全節点マージ)。
6. 線画をすべて削除します(削除しなくても可)。

[物性値、境界条件]

1. メカニカル物性値を定義した後、要素すべてに与えます。
2. モデル上端の各節点に下記の荷重を加えます。
 - $p = 0.5 * P / (\text{荷重を加える節点数} - 1) = 100$ (または圧力 $= -1.0E6$)
 - ただし、左右端の節点のみは $p / 2 (= 50)$ とします。

3.解析領域の左端すべての節点のxを拘束します(対称条件).

解析領域の下端すべての節点のyを拘束します(対称条件).

[計算実行]

1.「平面応力」を選択し、「変形計算」を実行します.

2.エラーのないことを確認します.

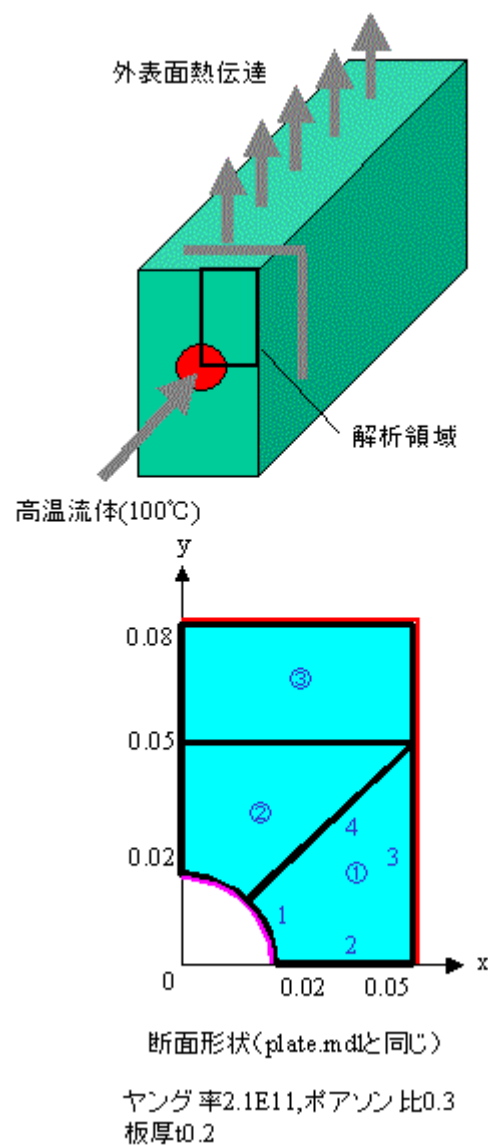
[計算結果プロット]

1.変形図をプロットします.

2.応力のコンター図をプロットします.

13-2. 計算例 熱応力 (サンプルファイル:heat4.mdl , 計算結果 heat4.out)

中央に高温流体が流れ、外表面が熱伝達で冷却される穴あき矩形棒に発生する熱応力を求めます.



解析手順

[要素の作成]

「変形・応力」の計算例と同様にしてモデル形状を作成します.

[物性値]

1.メカニカル物性値を定義(線膨張係数 1.17E-5)した後、要素すべてに与えます.

2.材料の熱伝導率(52)を定義した後、要素すべてに与えます.

[熱伝導境界条件]

- 1.モデル上端、右端の各エッジに熱伝達($h=50, T_{\infty}=20$)を与えます.
- 2.中央穴部分のエッジに熱伝達($h=500, T_{\infty}=100$)を与えます.

[熱伝導計算実行]

- 1.「平面ひずみ」を選択し、「熱伝導計算」を実行します.
- 2.エラーのないことを確認します.
- 3.熱伝導計算結果を要素温度「T」に与えます.

[メカニカル境界条件]

- 1.解析領域の左端すべての節点のxを拘束します(対称条件).
- 2.解析領域の下端すべての節点のyを拘束します(対称条件).

[メカニカル計算実行]

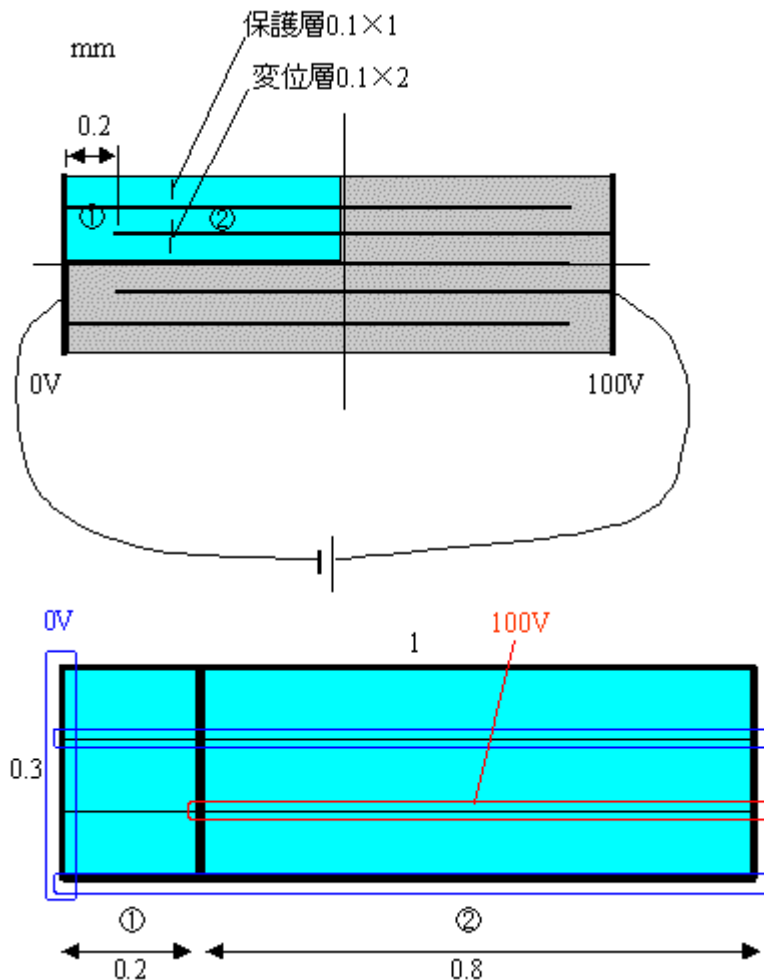
- 1.「熱応力 on」をチェックし、「変形計算」を実行します.
- 2.エラーのないことを確認します.

[計算結果プロット]

- 1.温度 T のコンター図をプロットします.
- 2.変形図をプロットします.
- 3.応力 σ のコンター図をプロットします.

13-3. 計算例 **ピエゾ内応力** (サンプルファイル:piezo4.mdl , 計算結果 piezo4.out)

大きさ $2W \times 0.6H \times 2D$ mm の変位層(中間 4 層)+保護層(上下 2 層)からなる積層型のピエゾ素子に電圧を印加したときの変形と応力を求めます.



解析手順

表示を「電場計算用語」に変更します(「表示-熱伝導用語の変更」)

[要素の作成]

計算量を考慮してモデルの左右は対称とみなし、1/4 モデル(青色部分)としてモデル化します。
描画スケール 0.001.

1.解析領域の左端から①,②の2つの要素を作成し、その後で、それぞれの要素を再分割します.

要素① : 縦 12 分割(不等 1) 横 8 分割(不等 -1.6)

要素② : 縦 12 分割(不等 1) 横 12 分割(不等 1.8)

2.すべての節点をマージします.

[電場物性値、境界条件]

1.誘電率 1.28E-8 を定義し、要素すべてに与えます.

2.電極に相当する節点に電位 0V,100V を印加します.

[電場計算実行]

「平面ひずみ」を選択し、「電場計算」を実行します.

[メカニカル物性値]

メカニカル物性値を定義した後、要素すべてに与えます.

[拘束条件]

解析領域の右端すべての節点のx、解析領域の下端すべての節点のy、(解析領域の右下端の節点は x,y)を拘束します.

[ピエゾ物性値の設定]

ピエゾ材料を定義して①, ②の変位層要素のみに与えます.

[メカニカル計算の実行]パネル

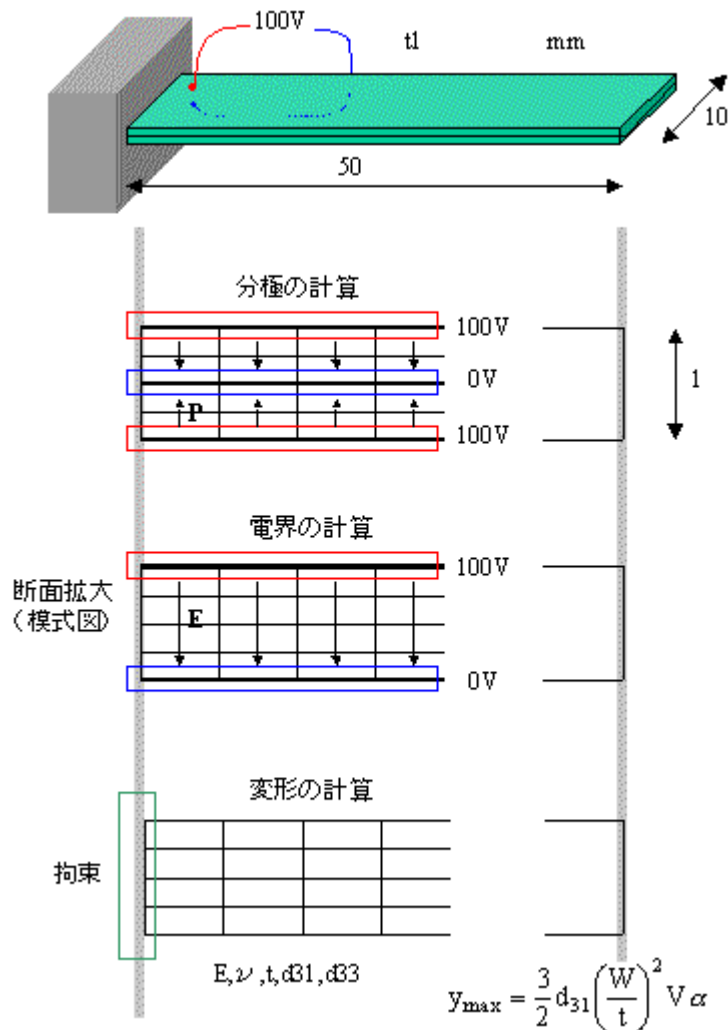
「ピエゾ on」をチェックし、「変形計算」を実行します. 分極と電界が同一で静計算の場合は分極を計算する必要はありません.

[計算結果のプロット]

変形図、応力のコンター図、電位、電界分布をプロットします.

13-4. 計算例 **バイモルフの変形** (サンプルファイル: バイモルフ 1a.mdl , バイモルフ 2a.mdl , 計算結果バイモルフ 1a.out , バイモルフ 2a.out)

大きさ 50W×1H×10Dmm のシリーズ型バイモルフの上下面電極に 100V の電圧を印加したときの変形を求めます. 3D イメージを下図に示します(計算モデルは2D).



解析手順

表示を「電場計算用語」に変更します

[要素次数]

要素タイプを2次要素に変更します。

[要素の作成]

グリッド分割 100、描画スケール 0.1 として、高さ 0.001、幅 0.05 の要素を 1 つ作成し、その要素を高さ方向に 4、幅方向に 10 分割します。

[電場物性値、境界条件、分極計算]

- 1.誘電率 1.81E-8 を全要素に与え、電極部分に 0V(中央),100V(上端および下端)の電位を与えます(この例では分極の非線形性を考慮しないため値は任意)。
- 2.「分極計算 on」をチェックして分極を計算します。

[境界条件、電場計算]

- 1.分極の計算で設定した電位をすべて削除します。
- 2.新たに下端の電極に 0V,上端の電極に 100V を与えます。
- 3.「分極計算 on」のチェックをはずして「電場計算」を実行します。

[メカニカル物性値、境界条件、ピエゾ物性値]

- 1.ヤング率(5.2e10)、ポアソン比(0.3)、板厚(0.01)を全要素に与えます。
- 2.左端のすべての節点のx、yを拘束(変位=0)します。
- 3.すべての要素に d31(-1.95E-10)、d33(3.6E-10)を与えます。

[メカニカル計算実行]

- 1.計算タイプを「平面応力」に設定します。
- 2.「ピエゾ on」をチェックし、「変形計算」を実行します。

[計算結果のプロット]

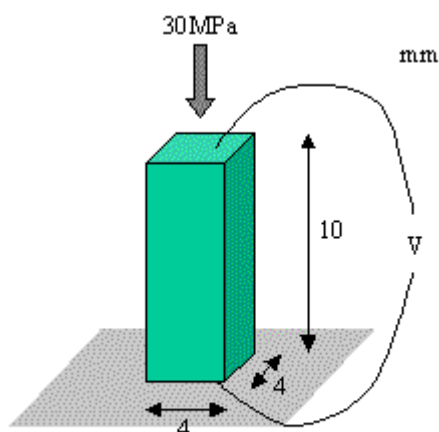
変形図、電位(温度)分布をプロットします。

* 本例のような「曲げ」が支配的な場合に純 1 次要素を使用すると、曲げに対して固めの結果(変位小)になります。1 次要素を使用する場合は相当量のメッシュ分割が必要です。

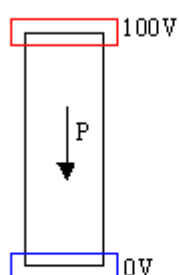
* 本例の変形計算では、分極および電界の計算結果を使用します。「変形計算モデル」(バイモルフ 2a_v4.mdl)には電界計算結果が保存されていない点に留意する必要があります。

13-5. 計算例 **ピエゾ圧電** (サンプルファイル: vgen41.mdl, vgen42.mdl, 計算結果 vgen41.out, vgen42.out)

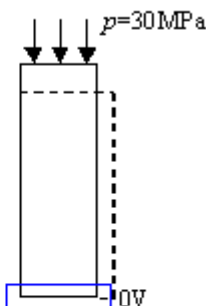
大きさ $4W \times 10H \times 4D$ mm の圧電素子に圧力 30MPa を加えたときの発生電圧を求めます(計算モデルは2D)。



分極計算



連成計算



$$V = \frac{p d_{33} H}{\varepsilon}$$

解析手順

表示を「電場計算用語」に変更します

[要素の作成]

描画スケール 0.01 として、幅 0.004、高さ 0.01、板厚 0.004 の要素を 1 つ作成し、その要素を幅方向に 4 分割、高さ方向に 10 分割します。

[電場物性値、境界条件、分極計算]

1.誘電率 $1.81\text{E}-8$ を全要素に与え、下部電極部分に 0V 、上部電極に 100V の電位を与えます(この例では分極の非線形性を考慮しないため値は任意)。

2.「分極計算 on」をチェックして分極を計算します。

[メカニカル物性値、境界条件、ピエゾ物性値]

1.ヤング率($5.2\text{E}10$)、ポアソン比(0.3)、板厚(0.004)を全要素に与えます。

2.下端のすべての節点のyを拘束(変位=0)します。ただし、左端の節点のみは、x,y の両方を拘束します。

3.上端に圧力 $30\text{E}6$ を加えます。

4.すべての要素に $d31(-1.95\text{E}-10)$ 、 $d33(3.6\text{E}-10)$ を与えます。

5.分極の計算で設定した上部電極の電位を削除します。下部電極は基準電位(0V)として残しておきます。

[ピエゾ連成計算]

1.計算タイプを「平面応力」に設定します。

2.「繰り返し数」を 5 として、「ピエゾ連成計算」を実行します。

[計算結果のプロット]

変形図、電位分布をプロットします。

* 計算結果の最大変位($3.62\text{E}-6$)よりヤング率を逆算すると $8.3\text{E}10$ となり、ピエゾ内部での電荷発生にもとづく抗力によってヤング率が、見かけ上、大きくなることが分かります。

13-6. その他の計算例

- ・ネガティブポアソン比 NPGGrid.mdl, NPGGrid.out
- ・縮退2次要素を用いた計算 Shukutai.mdl, Shukutai.out
- ・フックの固有値計算 Hook.mdl, Hook.out
- ・熱過渡計算 Heat4_tran.mdl, Heat4_tran.out
- ・ソナーのピエゾ連成動計算 Sonar_dyn.mdl, Sonar_dyn.out
- ・バイモルフのピエゾ連成動計算 バイモルフ 2a_dyn.mdl, バイモルフ 2a_dyn. out
- ・オートメッシュ使用例 Hasami.mdl, Hasami.out
- ・ピエゾの調和応答計算 Vgen42_harm.mdl, Vgen42_harm.out

14. PolarFEM のファイルフォーマット

14-1. ファイルの種類

解析データを保存するファイルは、ファイルの拡張子で区別して、

*.mdl :解析モデルデータ保存用ファイル

*.out :計算結果データ保存用ファイル

の2種類があります。いずれのファイルも、テキストファイルで、先頭行から「解析モデルデータ」が複数行書かれており、*.out ファイルでは、その後に、「計算結果データ」が複数行続きます。(「解析モデルデータ」部分は共通フォーマット)

14-2. キーワード行とデータ行

いずれのファイルも、キーワード行と必要行数のデータ行の組み合わせの連続になっています。現在、キーワードとしては以下の英字が用意されています。

version(Polar のバージョン),title(タイトル),maximum(最大数),parameter(パラメータ),coordinate(節点座標),connectivity(要素コネクティビティ),e_property(要素特

性),m_material(機械的物性値),t_material(熱伝導物性値),p_material(ピエゾ物性値),e_temperature(要素温度),constraints(拘束条件),tienode(タイイング),force(荷重),n_temperature(節点温度),n_generation(節点発熱),h_transfer(熱伝達),e_generation(要素発熱),polar(分極),infinite(無限要素),infcoeff(極補正),static(静計算設定)dynloads(動計算設定),extdll(PolarEXT),line(直線),arc(円弧),automesh(オートメッシュ),output(計算結果パラメータ),displacement(変位),strain(ひずみ),stress(応力),o_temperature(節点温度),gradient(温度勾配),dynamics(ピエゾ動計算),transient(熱過渡計算),harmonic(調和応答計算),eigen(固有値計算),iter_displacement(変位),iter_temperature(温度),iter_strain(ひずみ),iter_stress(応力),iter_gradient(温度勾配)

* バージョン、パラメータ、および要素形状に関する、以下のキーワード行の記述は必須で、記述する順序も変更することはできません。

version , maximum , parameter , coordinate , connectivity

ただし、要素がない場合は、coordinate,connectivity は省略可能です。上記以外のキーワード行とそれに伴うデータ行は省略可能(ファイル読込可能)です。

14-3. ファイルへの記述例

境界条件として、3つの節点に以下の荷重が与えられている場合、

節点番号 11 番に y 方向荷重 50

節点番号 12 番に y 方向荷重 100

節点番号 13 番に y 方向荷重 50

この境界条件のファイルへの記述は以下のようになります。

・

・ (前のデータ行)

force <N / Node-NO,Fx,Fy> : キーワード行

3 : データ行 荷重数=3 (以下、3行のデータ行が続く)

11,0,50 : データ行 節点番号 11、x 方向荷重 0、y 方向荷重 50

12,0,100 : データ行 節点番号 12、x 方向荷重 0、y 方向荷重 100

13,0,50 : データ行 節点番号 13、x 方向荷重 0、y 方向荷重 50

・ (次のキーワード行)

・

* 「force」につづく「<N / Node-NO,Fx,Fy>」はコメントで、5文字のキーワード「force」のみが有効

* キーワード行のコメントで「,」は同じ行で「,」で区切りながら連続して記述、また「/」は改行を意味します。

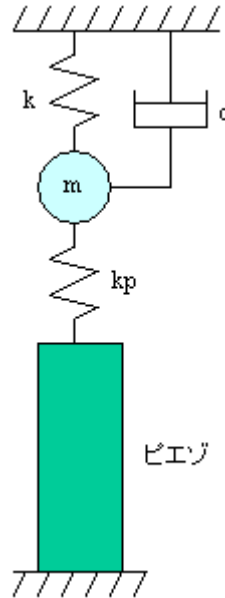
* 個々の記述は「計算例」の.mdl あるいは.out ファイルをテキストエディタで参照してください。

15. ユーザーコーディング PolarEXT

ユーザーが PolarFEM の諸変数を用いてコーディングすることによって、PolarFEM と外部系(コーディング)との接続が可能となります。コーディングされたコードを dll の形でビルドすれば(PolarEXT.dll)、PolarFEM から計算反復毎に呼び出されます。コーディングはあらかじめ用意されたサンプルコード(Visual C++)を編集することで容易に作成できます。

* 扱っている変数や使用方法などは、ファイル PolarEXT.cpp のコメントを参照してください(テキストエディタで参照可)。PolarEXT.dll の作成は、PolarEXT ディレクトリすべてを別名でコピーし、その中の PolarEXT.dsw を Visual Studio で編集してください。編集した後、Release Win32 でビルドし、生成された PolarEXT.dll を、アプリケーション使用時に、「PolarEXTの設定」パネルにて実行用 PolarEXT.dll にコピーして下さい。

例として、計算例ピエゾスタックの動計算 (Stack.mdl) において、ピエゾ上端にバネ-マス系を接続した場合のコード例(コーディング部分)を示します。



```
//
//----- この部分にコードを追加してください(ユーザーコーディング) -----
//
if((iCALM == 1) | (iCALT == 0)) //1 反復毎、電界計算終了直後に PolarEXT を 1 回実行
{
    ERROR = 1;
    return ERROR;
}
//
int i;
int node1 = 632, node2 = 633, node3 = 634; //バネを接続する節点の番号
double u, up, y, ydot; //マスとピエゾ上端の変位, マスの速度 (y=dx/dt), 加速度
double uu, yy;
double k = 1.0e7, kp = 5.0e7, m = 0.01, c = 10.0; //バネ定数, 質量, ダンピング
double f, fp, fc, fn, dt, r[5], d[5];
static double statU, statY; //static な(値を保持できる)変数
//
dt = dTIME;
up = *(dUY + node2); //バネを接続した節点の変位
//
//初期化
//
if(i INC == 1)
{
    u = 0.0;
    y = 0.0;
}
else
{
    u = statU;
    y = statY;
}
//
//ルンゲクッタ
//
for(i = 1 ; i <= 4 ; i++)
{
    if(i == 1)
    {
        uu = u;
        yy = y;
    }
    else if((i == 2) | (i == 3))
    {
        uu = u + d[i - 1] / 2.0;
        yy = y + r[i - 1] / 2.0;
    }
}
```

```

else
{
    uu = u + d[3];
    yy = y + r[3];
}
f = -k * uu;
fp = -kp * (uu - up);
fc = -c * yy;
ydot = (f + fp + fc) / m;
d[i] = yy * dt;
r[i] = ydot * dt;
}
u = u + (d[1] + 2.0 * (d[2] + d[3]) + d[4]) / 6.0;
y = y + (r[1] + 2.0 * (r[2] + r[3]) + r[4]) / 6.0;
//
//dTIME 後の変位, 速度, 力
//
statU = u;
statY = y;
*(dWOUT ) = u;
*(dWOUT + 1) = y;
*(dWOUT + 2) = up;
*(dWOUT + 3) = -k * u;
fn = kp * (u - up);
*(dWOUT + 4) = -fn;
*(dFY + node1) = 0.25 * fn;           //バネを接続した節点 1 に加える力
*(dFY + node2) = 0.5 * fn;           //バネを接続した節点 2 に加える力
*(dFY + node3) = 0.25 * fn;           //バネを接続した節点 3 に加える力
*(iIDF + node1) = 1;
*(iIDF + node2) = 1;
*(iIDF + node3) = 1;
//
//-----
//

```