

1. プログラムの概要 Outline of this program

このプログラムは、実数係数の1変数整次多項式 (n 次式) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ が表す実数の曲線と複素数の曲線を、 x の実部、 x の虚部、 $f(x)$ (虚部が0で実部のみ)、の特異な3次元座標系で描画します。また、それらの曲線が x の実部と x の虚部の2次元座標系 (通常の複素平面) に投影された曲線も描画します。これを使って、 $f(x)$ が n 本の曲線で構成されることや、 $f(x)=0$ が複素数の範囲で n 個の根を持つことを示すことができます。

This program draws graph of real curve and complex curve(s) of integer-order unary polynomial with real coefficients (n -th order formula) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ in special 3-dimensional coordinate system of real part of x , imaginary part of x , and $f(x)$ (real part only, imaginary part is zero), and also draws projected curves of the real curve and the complex curve(s) in 2-dimensional coordinate system (typical complex plane) of real part of x and imaginary part of x . The graph can show that $f(x)$ is constructed from n curves and $f(x)=0$ has n roots.

n 次式と描画範囲を指定して実行すると、曲線のグラフをディスプレイに描きます。そのグラフの静止画ファイルと曲線を構成する点の座標の数値ファイルを出力することも可能です。

The program draws graph of curves of given n -th order formula in given drawing area on display. Image file of the graph and numerical file of coordinates of points in the curves can be output.

2. ファイル Files

polygra_20????_win?.exe プログラム、実行ファイル Program, Execution file

Windows 用、95 以降、32 ビット、レジストリは書き換えません。

For Windows 95 or later, 32 bit, registry is not rewritten.

Windows 8 以降の、特にタブレットパソコンで、恐らく文字の拡大表示の設定などにより、文字が大きすぎたり小さすぎたりすることがあるため、Windows のバージョン別に表示を少し変更／個別にコンパイルしています。表示が変な場合は、いくつか試してみてください。さらに、互換モードを使用してみてください (実行ファイル (のアイコン) を選んで右クリック、プロパティ、互換性、「互換モードでこのプログラムを実行する」にチェック、Windows 7 かそれ以前を選択)。

Displayed words in the execution sometimes become too large or too small, especially in the case of tablet computer of Windows 8 or later, probably by zoom function of letters (font), etc. When you encounter such trouble, please attempt to use some different execution files compiled on each version of Windows. Moreover, please use compatibility mode (click the right button on the icon of execution file, property, compatibility mode, check execute this program by compatibility mode, select Windows 7 or prior, OK).

インストールは不要です。ダブルクリックで起動します。

Installation is not required. The program starts by double click on the icon.

このファイルです。 This file

他のファイル Other files

画像ファイルと数値ファイルの出力例です。

Outputting examples of image file and numerical file

数値ファイルは、 n 次式の定義や描画範囲などをファイルで指定するための設定ファイルの記述例として使うことができます。

The numerical file can be used for an example of configuration file which can define the n -th order formula and drawing area, etc. as external file.

3. 開発の経緯とプログラムの内容

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の虚数根や複素数根の位置を 2 次式 $f(x)=ax^2+bx+c$ のグラフと共に図示することは、 x の実部、 x の虚部、 $f(x)$ (虚部が 0 で実部のみ) の 3 次元で描画する方法で可能になります (図 1)。私はこの描画の方法を 1977 年頃に思いつきました。その際、もっと高次の場合に実数の波打つ曲線の極大や極小の点から複素数の曲線が分岐する例 (図 2) や、最高次の項のみの場合に 1 箇所でも多数の曲線が分岐する例 (図 3、いわゆる円分方程式に対応します) も、容易に考えることができました。

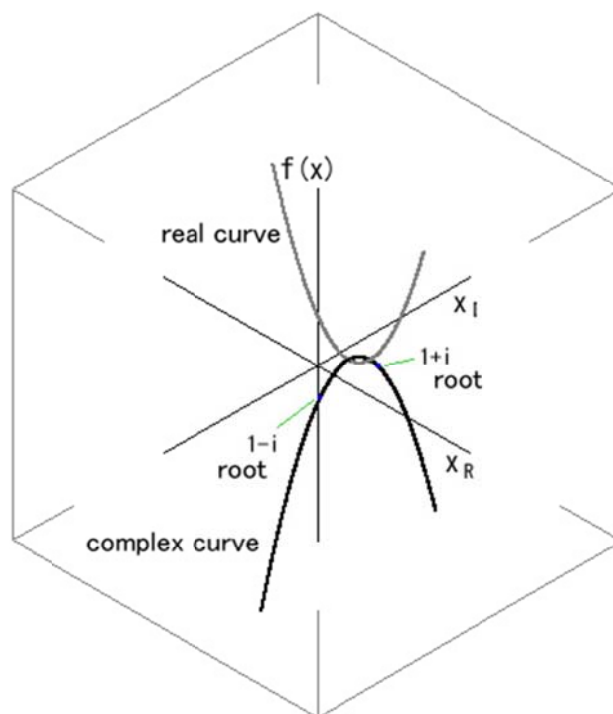


図 1 x_R (x の実部)、 x_I (x の虚部)、 $f(x)$ (虚部が 0 で実部のみ) の 3 次元座標系での描画

Drawing by 3 dimensional coordinate system of X_R (real part of x), X_I (imaginary part of x) and $f(x)$ (real part only, imaginary part is zero) $f(x)=(x-1+i)(x-1-i)=x^2-2x+2$

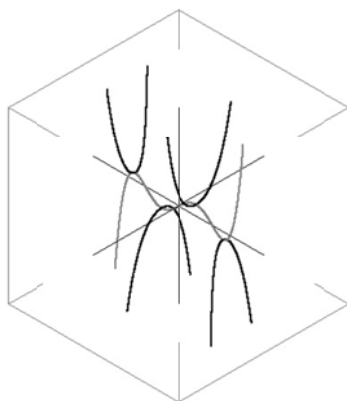


図 2 $f(x)=(x+3)(x+2)x(x-2)(x-3)$

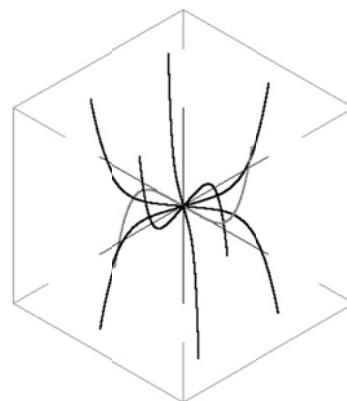


図 3 $f(x)=x^5$

2013 年に、より一般的にどのような曲線群の配置の多様性があるのかを系統的に調べて、実数係数の 1 変数整次多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ を分類してみようと思い立ち、専用のプログラムを作り始めました。この分類作業は、最高次数 n に対して、 n 本の曲線（1 本の実数の曲線と $n-1$ 本の複素数の曲線）の相互の繋がり方に関する位相幾何学的な場合分けに相当します。ここで、最高次の項のみの場合に n 本の曲線が回転対称の配置になることから、より低次の項を含む一般的な場合の配置の多様性は、低次の項の寄与でその回転対称の配置が変化することで生じます。

ネットを検索すると、同じ描画の方法を用いたそのような場合分けは、3 次式では完全に調べられていましたが、4 次式以上では不完全でした。結局、2 年間ほど掛けて、プログラムを改良しつつ、7 次までの種々の場合を具体的に例示して、2016 年に数学の雑誌に短い論文を投稿することができました（International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.110, No.4, 665-677 (2016)、<https://ijpam.eu/contents/2016-110-4/index.html>）。ただし、編集室による TeX ファイルの最終編集段階における間違いがあり、残念ながら修正してもらえなかったもので、独自に修正した PDF ファイルを私のウェブサイト (<http://www2.accsnet.ne.jp/~masukazu>) に入れています。また、この論文では、 x を実部、 yi を虚部として、多項式を $f(z) = f(x+yi)$ と表記しています。その論文の中で用いた図から、5 次までの例をまとめて示します（図 4、各副図の下側は 3 次元のグラフを x の実部と xi の虚部からなる 2 次元（通常の複素数平面）に投影したものです）。6 次式と 7 次式の例は上記の投稿論文をご参照ください。数学は専門外の分野であるため、過去の文献調査が不十分なのですが、多量の数値計算を要する作業なので、コンピュータが未発達だった頃には同様のきれいな図による例示は極めて難しかったはずで

その段階までにおける専用プログラムの機能は、(1) n 次式の係数を入力して、描画範囲の境界（上の面と下の面）で式を満たす点を探索してから曲線に沿ってさらに探索、(2) 曲線をディスプレイに描画、(3) 静止画ファイルの出力、(4) 曲線を構成する点の座標の数値ファイル出力、でした。

その専用プログラムのユーザインターフェイスなどを改善して、今回、Vector さんにライブラリ作品登録しました。具体的な改善として、(1) 係数を入力して式を定める以外に $f(x)=0$ の根を入力して式を定めることもできるように変更、(2) 曲線の探索と描画の範囲や間隔の数値を可変に変更、(3) 描画範囲の境界で式を満たす点を探索する際に側面も探索するように変更、(4) 係数と根の指定や探索と描画の範囲の指定を設定ファイルで与えることもできるように変更、を行いました。

このプログラムを用いると、実数係数の n 次方程式 $f(x)=0$ が複素数の範囲で必ず n 個の根を持つことをグラフで示すことが可能です。また、 n 次方程式の n 個の根の相互の関係を知らることが可能になります。 n 次方程式を解くことは種々の分野で出てきて、通常は、単に n 個の根を得るだけですが、 n 個の根の隠された相互の関係を知らることで、それらの分野における研究が少し進展するのではないかと期待しています。なお、複素数係数で $f(x)$ も複素数で扱おうとリーマン面の話になり、最高次の項が作るリーマン面に低次の項が皺(しわ)を加えることになります。

このプログラムの作成には F-BASIC（コンパイラ、富士通ミドルウェア製、Ver.6.3）を用いました。今はもう売っていない古いソフトですが、バグがほとんどなくて、生成される実行ファイルが高速なので、ずっと愛用しています。でも、今回、GUI 対応にしてみても、限界が出てきました。

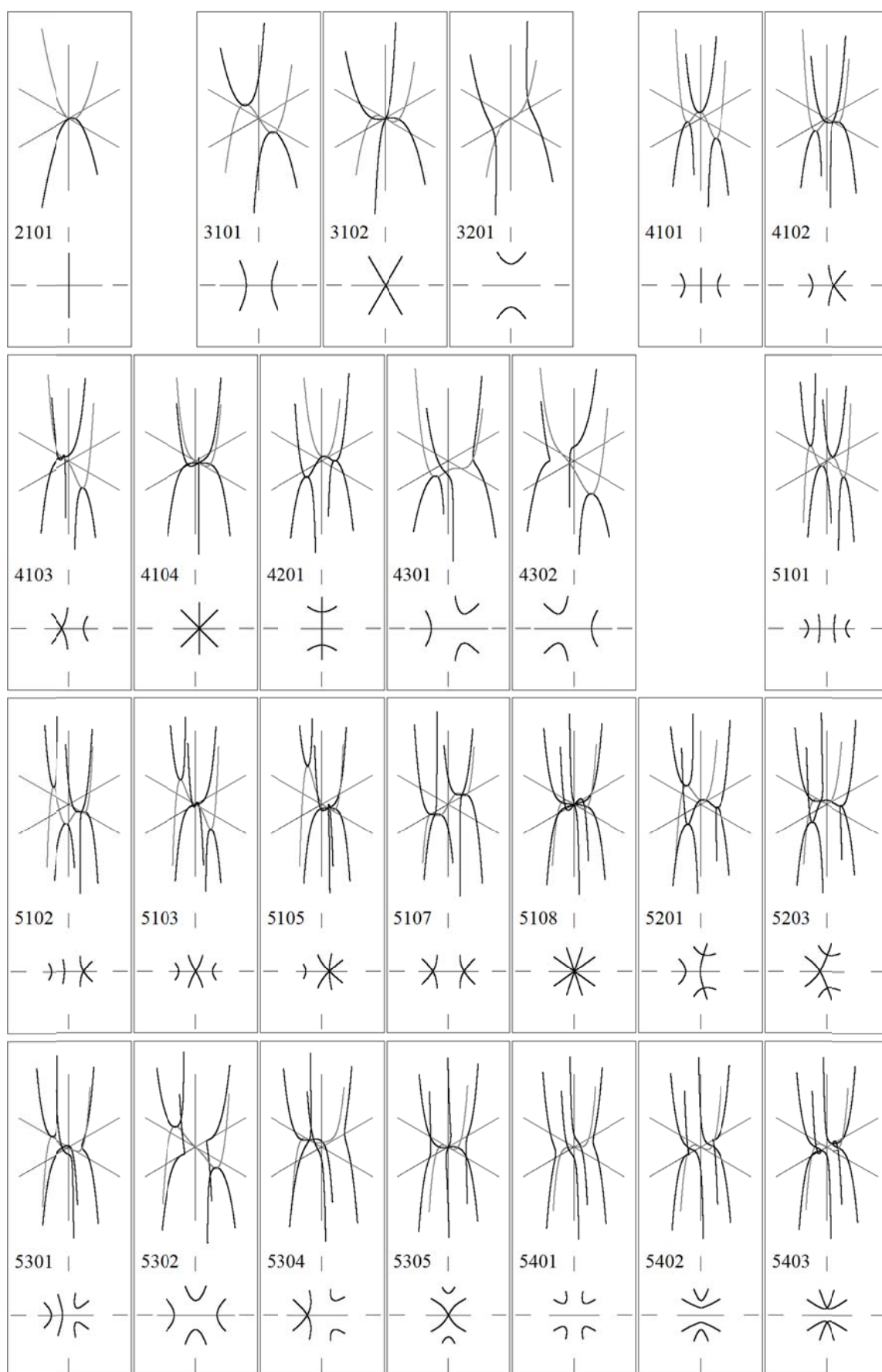


図4 2次～5次式の曲線の場合分け Topological classification of curves of 2nd-5th order
(International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.110, No. 4, 665-677 (2016))

4. 使い方

実行時の画面を示します（図5）。

No. of root	Real root or Real part (real number)	None or Imaginary part (0 or plus)	Multiplicity (one pair of conjugate roots is counted as 1)
(1)	-4	+/- 0 i	1
(2)	0	+/- 2 i	2
(3)	3	+/- 3 i	1
(4)	0	+/- 0 i	0
(5)	0	+/- 0 i	0
(6)	0	+/- 0 i	0
(7)	0	+/- 0 i	0
(8)	0	+/- 0 i	0
(9)	0	+/- 0 i	0
(10)	0	+/- 0 i	0

	Range of Search and Plot	Search step	Magnification
x Real part	-6 — 6	0.01	1 (fix)
x Imaginary part	0 — +/- 6	0.01	1 (fix)
f(x) Real part	-10 — 10	0.01	0.006

図5 実行時の画面 Screen copy during execution

実行ファイルをダブルクリックして、現れるウインドウの左側で以下のように入力、実行します。

(1) $f(x)$ の指定

「1. Definition of Polynomial $f(x)$ 」の箇所、左側の「by Coefficients」をラジオボタンで選択してから、その下のところで $f(x)$ の係数を入力して、または、右側の「by Roots of $f(x)=0$ 」をラジオボタンで選択してから、その下のところで 最高次数の係数と、 $f(x)=0$ の根を入力して、 $f(x)$ を指定します。

根を入力する場合、実根は虚部の箇所を 0 で、また、複素根は共役で、入力します。各根について、多重度も入力します。共役根の多重度は 1 対当り 1 と入力します。例えば、 $f(x) = x^3(x-1)*[(x+2+3i)(x+2-3i)]^2$ なら、 0 ± 0 と多重度 3、 1 ± 0 と多重度 1、 -2 ± 3 と多重度 2、の 3 種の入力になります。

(2) 描画範囲などの指定

「2. Condition of Search & Plot」の箇所、描画範囲を入力して指定します。x の虚部の範囲は、正と負で同じとしていますので、絶対値で 1 つだけ入力します。

また、探索の間隔を指定します。通常は既に入力されている 0.01 程度で問題ありませんが、探索できない（曲線が見つからない）場合は適宜調節してください。ただし、演算が遅くならないように単精

度の変数にしています（倍精度の変数にしません）ので、描画範囲の数値と探索の間隔で桁数の違いが6桁程度以上ですと、加減算で桁落ちが発生して、うまく動作しない可能性があります。

さらに、 $f(x)$ については、表示の倍率（縮小することが多いので1未満、 $1E-3$ などの指数表示も可）を指定します。通常は既に入力されている0.0001ぐらいから開始して、適宜調節してください。最高次数 n が大きいほど小さな値にすることが望ましいです。

(3) ファイル出力の指定

「3. File Output of Result」の箇所では、ファイル出力の指定を行います。画像ファイル（画面に表示されるグラフのコピー、bmp形式）と数値ファイル（ $f(x)$ の指定）や「描画範囲などの指定」の内容とグラフの各点の座標の羅列など、csv形式）のそれぞれについて、必要なら「Image」と「Numerical」をチェックして、ドライブ名とディレクトリ名、拡張子を除いたファイル名を入力します。

「Input of Followings by Dialogbox」のボタンを押すと、それらの入力または選択をダイアログボックス（小さなウィンドウ）で行うこともできます。

(4) 設定ファイルによる指定

以上の「 $f(x)$ の指定」と「描画範囲などの指定」と「ファイル出力の指定」を、予め作っておいた設定ファイルで指定することも可能です。その場合は、「File Input of Def. etc.」のボタンを押して、出てくるダイアログボックスでファイルを選択します。選択すると、設定ファイルに記載された各指定内容が画面に転記されます。

また、(3)で出力した数値ファイルを設定ファイルとして選択してから、 $f(x)$ の指定や描画範囲の指定やファイル名を変更することもできます。

設定ファイルの書式は、同梱の出力例のファイルや、(3)で出力された数値ファイルを、表計算ソフトなどで開いて参照してください。

(5) 実行

「Clear and Exec」のボタンを押すと、既にグラフがあれば消去してから探索と描画を行います。「Exec without Clear」のボタンを押すと、既に描画されたグラフがあっても消去せずに重ねて描画を行います。後者は、(2)において曲線が綺麗に見える描画範囲や表示倍率を試行錯誤で決める場合などに有用です。

5. 著作権など

著作権は作者にあります。

この説明ファイルや他のファイルと一緒にあればプログラム（実行ファイル）を自由に再配布していただいて構いません。

このプログラムを用いて発生した損失（ほぼ無いと思いますが）について、作者は責任を負いません。

作者のサイト <http://www2.accsnet.ne.jp/~masukazu>

メールアドレス masukazu@mail2.accsnet.ne.jp（余分の小さなスペースを除いてください）

メールを頂いてもあまりお返事できないかもしれません。申し訳ございませんがご了承ください。でも、ご意見をお寄せいただけますと嬉しいです。