# 素数を探索するPrimeFinder(V2.0):探索編

## 目次


| | 頁 |
|---|---|
| 1 素数発生間隔(Gap)分布の周期性 ・・・・・・・・・・・・・・ | 2 |
| 1.1 実態 | 2 |
| 1.2 原因の推定：単独素数の場合 | 3 |
| 1.3 原因の推定：双子素数の場合 | 3 |
| 1.4 実発生率との比較 | 4 |
| ２ 素数発生の構図 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 4 |
| 2.1 素因数を共有する素数：用語定義と概要 | 4 |
| 2.2 素因数を共有する素数：素因数を指定した解析 | 5 |
| 2.2.1 事例解析 | 5 |
| 2.2.2 全体的傾向 | 7 |
| 2.3 素因数を共有する素数：その全貌 | 8 |
| ３ 補足：Gap分布解析の一般化 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 9 |
| 3.1 単独素因数(P,Q=P+2G) | 10 |
| 3.2 双子素数(P,Q=P+2),(R=P+6G,S=R+2) | 10 |


本書はPrimeFinder(V2.0)の**探索項目を中心**に記します

・**操作関連事項**は素数を探索するPrimeFinder(V2.0)：**操作編**を参照ください
本操作編の項目xxを参照する場合は**操xx**の如く記します

・**機能的事項**は素数を探索するPrimeFinder(V2.0)：**機能編**を参照ください
本機能編の項目xxを参照する場合は**機xx**の如く記します

本編では、本バージョンV2で新たに明らかになった項目(素数発生間隔の**周期性**と素数の**発生構造**)について重点的に探索します

## 1 素数発生間隔(Gap)分布の周期性

### 1.1 実態：表示の詳細は機3.3を参照

隣接素数間の間隔(Gap)分布例を図1.1、図1.1.1に示します

i ・横軸は実Gap値の1/2で正規化して有ります

・縦軸は各正規化Gap値の発生数の指数表示であります

10^nは$10^n$を表示します

分布=0は縦軸0位置に表示されます

ii 図1.1は**単純素数間Gap分布の全貌**です

Gap=1～124迄の各Gap値の発生数が・・・ドットでプロットされています

斜めの直線Log(分布)=a-b･Gapは**指数近似**が成立して事を示します

iii 図1.1.1は図1.1のGap=0の処から50迄の拡大図であります

本図でGap間隔に**3Point毎の周期性**が確認出来ます。即ち、

3n+{0, 1, 2}=1, 2, 3, 4, 5・・・の各点で、分布値の**周期性**が認められます

3, 6, 9, 12・・・の各点の分布値の突出が確認できます

iv 本図はGap=0～50の部分表示ですが図1.1の右上の**小グラフ**でこれが全体的にも成立している事を表します

右上の小グラフの

・上部4セットMnk(s, w)=(0, ∞)を全Gap(s=0, w=∞)分布を**常に**

・下部4セットはs, w**可変**ですが**初期状態の為**上部4セットと同じ表示になってしており、

上下小グラフとも、左から、

・2n+k：**2周期毎**の分布で開始点sにより変動します

・3n+k：**3周期毎**の分布で開始点sに拘わらず**3n+0分布が最大**になります

・5n+k：**5周期毎**の分布で大きな周期性認められません：**双子素数**間Gapでは本分布が認められます：機3.3項を参照

・7n+k：**7周期毎**の分布で大きな周期性認められません

(s, w)はGap分布計測の(s=**開始Gap値**, w=**Gap幅**)で有ります：(s, w)=(0, ∞)は全Gapが対象であります

v 各表示の詳細説明と**双子素数**の場合は機3.3を参照

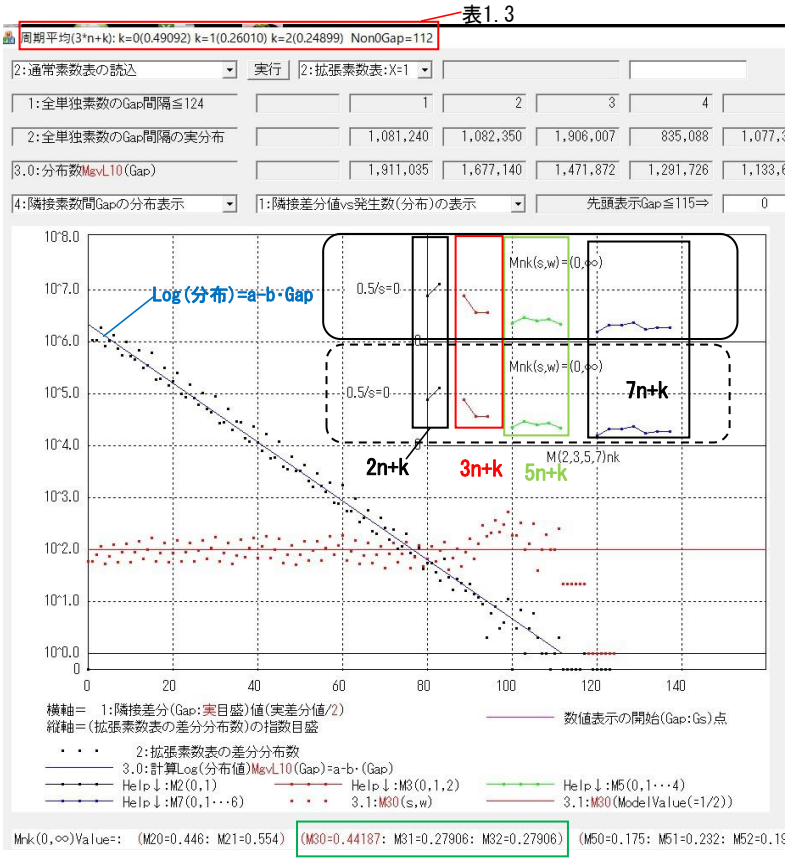



図1.1　単独素数のGap分布：全貌

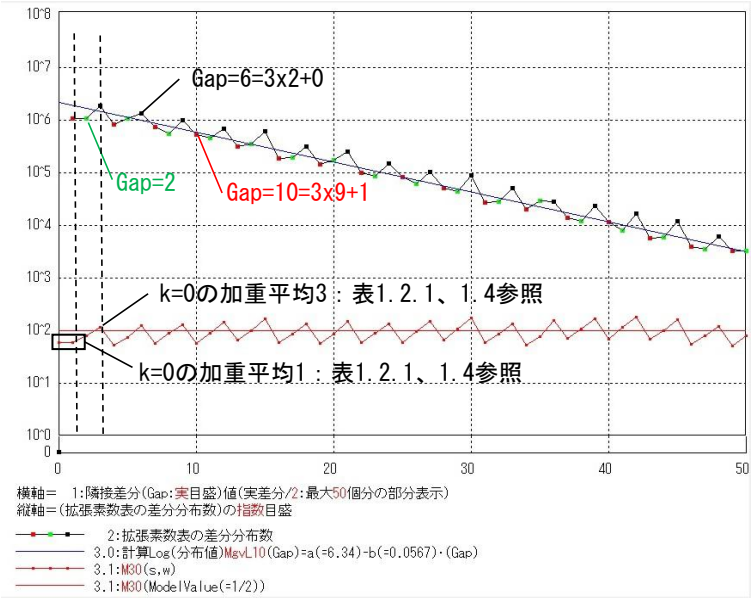



図1.1.1　単独素数のGap分布：図1.1の先頭50Gap分の詳細

## 1.2 原因の推定：単独素数の場合

1.1項の**周期性の発生**は、下記に依るものと思われます

**2つの連続する素数P,Qについて検証します。整数nをkで割った剰余演算結果Mod(n,k)をn%k記号で表します**

ⅰ **P%3={0,1,2}ですがP%3=0となるPは非素数**で有ります

表1.2.1のNo1行の**P%3**の各値(=0,1,2)に対するQ%3の値をG=3n+k(=0,1,2)対応にNo2.0～2.2行に記します

**P,Qが共に素数**である為、P%3=0かQ%3=0のケースが除外されます

表1.2.1 後続整数Qの素数確率：Q%3=(P+2G)%3

| No | | | | | | ok組数 | Q=P+2G　G=3n+k　k=0,1,2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Q%3=(P+2G)%3 | | | | | | 実発生率:1.4項参照 | | | |
| 1 | Gの値↓ | P%3= | 0 | 1 | 2 | | 単純平均 | 加重平均1 | 加重平均3 | Qが素数になる可能性 |
| 2.0 | 3n+0 | Q%3= | 0 | 1 | 2 | 2 | 0.49092 | 0.44178 | 0.51635 | P%3=1,2で素数の可能性有り |
| 2.1 | 3n+1 | Q%3= | 2 | 0 | 1 | 1 | 0.26010 | 0.27906 | 0.24187 | P%3=1の場合は素数でない |
| 2.2 | 3n+2 | Q%3= | 1 | 2 | 0 | 1 | 0.24899 | 0.27906 | 0.24178 | P%3=2の場合は素数でない |
| 3 | ok組数 | | 0 | 2 | 2 | 4 | 1.00001 | 0.99990 | 1.00000 | 合計はQ%3が非0になるCase数 |

ⅱ **ⅰの前提でQ%3=(P+2G)%3を求めます**

表1.2.1:本表では,先行素数PのP%3=0,1.2に対して,G=3n+0,1,2の各値に対してQ%3の値を求めています

この結果,G=3n+0即ちGap間隔が3の倍数の時が,他の場合の2倍の素数発生率が**期待**できる事が判明します

注：表1.2.1でQ%3の欄のNo2.0～2.2行の数値は**0か非0**のみが意味を持ちます

## 1.3 原因の推定：双子素数の場合

双子素数のGap分布例は**機3.3項**にその全貌を示します

本図から、双子素数間隔は5n+0即ち、5の倍数での発生率が高い事が判明します:1.2と同様に、

表1.3.1 (P,Q=P+2)の後続整数(R,S=R+2)の素数確率

| No | P%5→ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ok組数 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Q%5→ | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | | 実発生率:1.4参照 | | |
| 2 | Gの値↓ | R(=P+6G)%5 | | | | | S(=R+2)%5 | | | | | | 単純平均 | 加重平均1 | 加重平均5 |
| 2.0 | G=5n+0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 3 | 0.34600 | 0.30937 | 0.33081 |
| 2.1 | G=5n+1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0.11091 | 0.12001 | 0.11817 |
| 2.2 | G=5n+2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 0.22239 | 0.23799 | 0.22753 |
| 2.3 | G=5n+3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 0.20916 | 0.22107 | 0.21672 |
| 2.4 | G=5n+4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 0.11153 | 0.11155 | 0.10677 |
| 計 | ok組数 | 0 | 3 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 3 | 0 | 3 | 9 | 0.99999 | 0.99999 | 1.00000 |

**(P,Q),(R,S)の連続双子素数(Q=P+2,R=P+6G,S=R+2)の発生確率**に就いて検討します:**P≧5とします**

ⅰ (P,Q),(R,S)何れも素数で連続双子素数の為には下記が更に必要で有ります

Pの次の双子素数の先頭素数Rは**R=P+6G**で**G=5n+k**、**R%5**=(P+6(5n+k))%5=(P+6･5n+5k+k)%5=**(P+k)%5**

ⅱ 結果を表1.3.1に要約します:本表では、

・P%5={0,1,2,3,4}に対して、**P%5=0**はPが非素数となるの為、表から**朱記**表示しています

・**P%5=3**の列も、**Q%5=(P+2)%5=0**になり、Qが非素数で、**朱記**表示しています

R,SはP,R間GapG=5n+k:k={0,1,2,3,4}に依存します。行No2.0以降にR%5,S%5の結果が表示してあります

・**R%5=3**になるGの行は**S%5=0**となり**黒字**で除外、**S%5=2**になるGの行も**R%5=0**となり**黒字**で除外

ⅲ 最終的には、**P%5,Q%5,R%5,S%5の何れもが非0のケースのみが残り、ok組数欄に記された数字により**

・**G=5n+0**の場合は、**P%5=1,2,4の3ケース**で(P,Q),(R,S)の組合せが双子素数になりえる

・**G=5n+1**の場合は、**P%5=1の1ケース**のみが双子素数たり得る・・・

**G=5n+0**での双子発生率が**全体の1/3**になる事が**期待**されます

### 1.4 実発生率との比較

ⅰ 表1.2.1(単独素数間)、1.3.1(双子素数間)で**各3種類の実発生率定義**と比較評価を表1.4に示します

**表1.4 実発生率の定義とModel値との比較**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 単純平均 | 単純素数 | 図1.1の3.1:M30(s,w)のグラフの各Gap(=s)点毎の | | **単純平均で s=0,w=∞の起動直後の値** |
| | 双子素数 | 機図3.3.1の3.1:M50(s,w)のグラフの各Gap(=s)点毎の | | |
| | 3.1:**のグラフ,数値表示**では、k=0対応の値ですが全てのkの値は図1.1,機図3.3.1の Top行 に表示 | | | |
| 加重平均1 | 単純素数 | Mnk(0,∞)= Mnk(1,∞) | 図1.1ミニグラフ上段の3n+kのk毎の値 | 図1.1.1参照 |
| | 双子素数 | | 機図3.3.1ミニグラフ上段の5n+kのk毎の値 | 機図3.3.1参照 |
| | 3.1:**のグラフ横軸Gap=0/1、k=0**対応の値で(**s対応の分布が支配的の為**)実分布の形と相似しており s=0,1のk=0対応値は小さくなっております | | | |
| 加重平均3 | 単純素数 | Mnk(s=3,∞) | 図1.1ミニグラフ下段の3n+kの各k対応の値 | 図1.1.1参照 |
| 加重平均5 | 双子素数 | Mnk(s=5,∞) | 機図3.3.1ミニグラフ下段の5n+kの各k対応の値 | 機図3.3.1参照 |
| 加重平均3,5とも**最初の有効k=0を起点**としており、**最もModel値に近い値**になっています | | | | |

ⅱ 実発生率は定義によって誤差がありますが、表1.2.1、1.3.1のok組数は

・単独素数Gap分布3n+kに就いては素因数3のみの影響を

・双子素数Gap分布5n+kに就いては素因数5のみの影響を

を取り上げましたが、**一般の素因数r**の影響については、**３補足**を参照

## ２ 素数発生の構図

ここでは素数発生率をその発生構造から検討します

### 2.1 素因数を共有する素数：用語定義と概要

**任意の整数N**の**素数条件**は、$r=N^{0.5}$(=**Nの平方根**)までの全ての素数(**素因数**と呼びます)と**素**で有ることが**必要十分条件**であります：これで、**r未満、r以上の何れの整数**もNの約数にはなれません

ⅰ 任意の素因数を$r_0$として、

$r_0$以下の**全ての素因数と素**なる整数を$r_0$**を共有する(又は$r_0$から生成される)整数**と定義します

$r_0$の次の素因数を$r_1$として、

・$r_0$を共有する整数Pが$P<r_1^2$ならPは正真正銘の素数であり,**確定素数**と定義ます

・$r_0$を共有する整数Pが$P\geqq r_1^2$ならPは$r_1$以上の素因数を**約数に持つ**可能性があり,**暫定素数**と定義します

この中で約数を持てば、素数ではなく**失格素数**となり、約数を持たなければ**確定素数**になります

ⅱ $r_0$を共有する**暫定素数**Pは、$Pn=r_0^2+n$として、

$n=0,1,2,\cdots n_1,n_1+1,n_1+2,\cdots n_2,\cdots n_3,\cdots n_x$ として、

・0～$n_1$が$Pn<r_1^2$を満たす範囲で、$n_1=r_1^2-r_0^2$ 無条件で**確定素数**範囲となります

・$n_i=r_i^2-r_0^2$ 図2.2.1-0を参照

ⅲ $n_x$はPnを$r_0$以下の全ての素因数(2～$r_0$)で除した徐余組合わせが1巡する範囲で、

・$n_x=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdots r_0$ n=0～$n_x$の範囲で$Pn=r_0^2+n$と$r_0$以下の素因数での**徐余組合**わせとは**1対１**で有ります

・n=0～$n_x$の範囲で$r_0$以下の全ての素因数と素なるnの$Pn=r_0^2+n$が、$r_0$を共有する暫定素数になり、

その数$s_x$は、各素因数中の**約数=0**を除いて、

$s_x=(2-1)(3-1)(5-1)(7-1)\cdots(r_0-1)$ となります

・$n_1=r_1^2-r_0^2=(r_1-r_0)(r_1+r_0)$で、これに比べると、$n_x$,$s_x$は$r_1$**増大**に伴いとてつもなく大きな値になり,

通常の整数計算範囲を超えます。然しながら、n=0～$n_x$の範囲で$P=r_0^2+n$が**暫定素数**になる確率$h_x(r_0)$は

$h_x(r_0)=s_x/n_x=(1-1/2)(1-1/3)(1-1/5)\cdots(1-1/r_0)$ 各(1-1/r)は素数rがPnと素になる確率となります

これは、通常の浮動小数点演算可能であります

本式は直感的に分り易い式ですが、**+10%程度の誤差**があり、以下この**誤差の解明**が課題です:図2.2.1-1

## 2.2 素因数を共有する素数：素因数を指定した解析

### 2.2.1 事例解析

i　素因数通番$sq_0$=100, 素数値$r_0$=547を事例に具体的に検討します：$r_1$=557

・$n_1$の=$r_1^2-r_0^2$=11,040。$n_x/n_1=10^{218.4}$>>$n_1$となり**巨大**です

・n=0～$n_1$区間が**確定素数**区間でこの区間は0～$n_x$区間の**先頭のほんの一部**で有ることがわかります

ii　2.1の$h_x$式が適用されるのはn=0～$n_x$**の全体**に対してであり、0～$n_1$間の確定素数発生状態が問題であります

この事を含めて、図2.2.1-0に示すように、

Pn=$r_0^2$+nとして、n=0,1,2,と加算して、Pnの区間$r_i^2$～$r_{i+1}^2$の各区間内での下記の状態をしらべます

・Pnが$r_0$**迄の素因数の約数を持つか**：持たなければ**暫定素数**

・この**暫定素数**Pnが$r_1$～$Pn^{0.5}$**迄の素因数の約数**を持つか

・持たなければPnは**確定素数**

・持てばPnは素数性失格し、**失格素数になります：確定素数数=暫定素数数-失格素数数**

| Pn=$r_0^2$+n：n= | 0 ～ | $n_1$ ～ | $n_2$ ～ | $n_3$ ～・・・ | $n_k$ | ・・・ | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pn= | $r_0^2$ ～ | $r_1^2$ ～ | $r_2^2$ ～ | $r_3^2$ | $r_k^2$ | | |
| 区間番号sq= | ← 0 → | 1 | 2 | 3 ～・・・ | sq=k | | |

・区間$n_i$～の長さk(i)=$r_{i+1}^2-r_i^2$

・区間$n_i$のPn初期値=$r_i^2$

図2.2.1-0　Pn=$r_0^2$+n（n=0～$n_x$）の区間分割(sq)

結果の１例を図2.2.1-1/2に示します

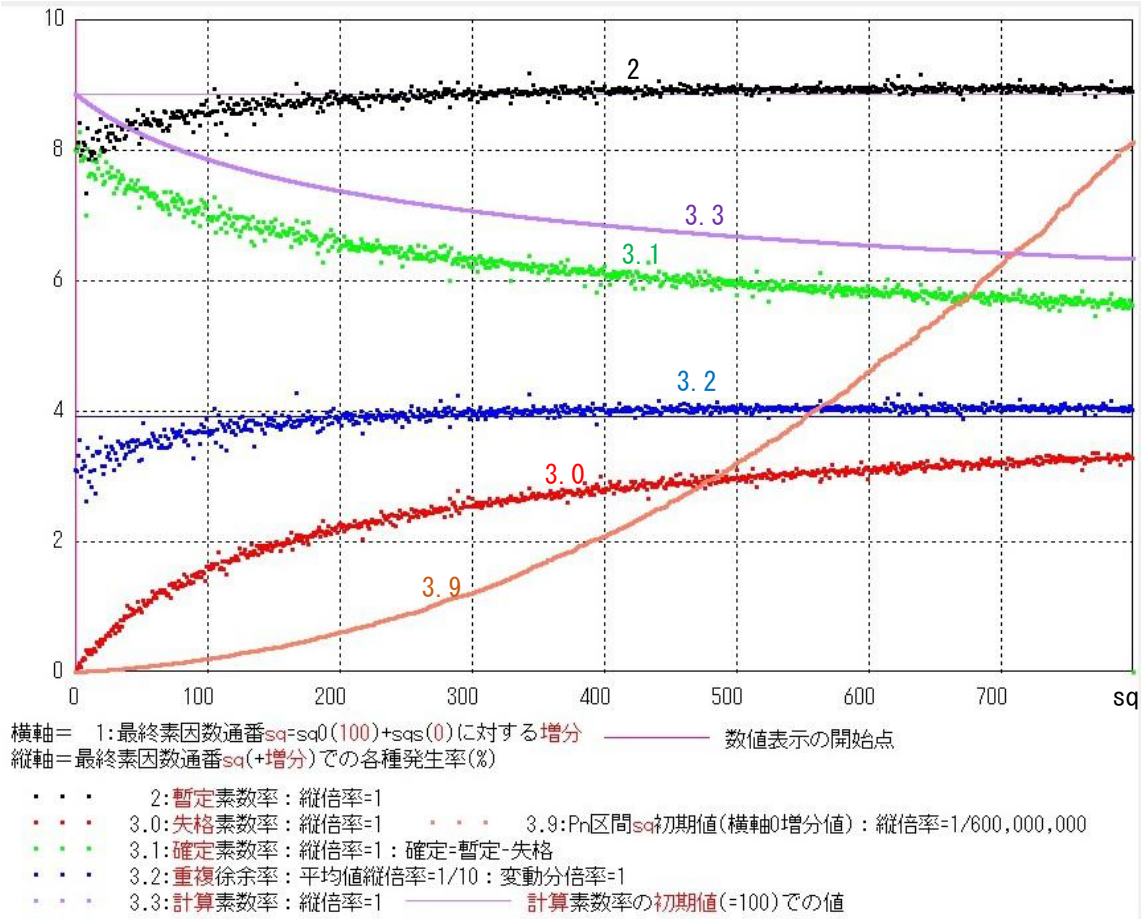



図2.2.1-1　$r_0$=547($sq_0$=100)の素因数を共有する暫定素数分布：sq=0～799の全体像

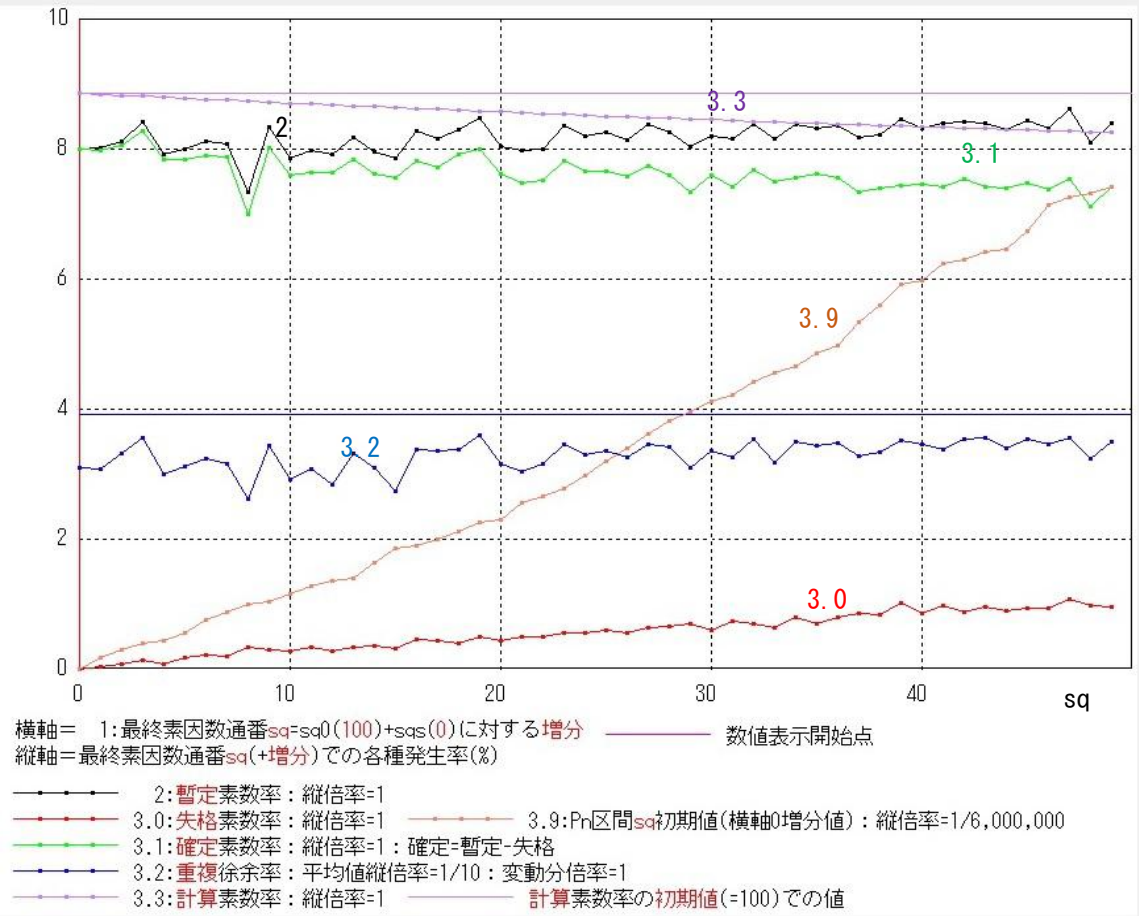



図2.2.1-2　$r_0$=547(sq$_0$=100)迄の素因数を共有する暫定素数分布：sq=0～49:図2.2.1-1の先頭拡大図

iii 図2.2.1-1/2の概要

・両図とも2～3.3のXX率の表示は各区間sqでのXX発生数を区間長k(sq)で割って正規化したものです

・図2.2.1-2は図2.2.1-1の前半sq=0～50区間分の詳細グラフで全て折れ線表示です
両図とも横軸sq=0の先頭のみが　2暫定素数=3.1確定素数(3.1失格素数=0)となります
以降sqの増大に伴って、3.0失格素数が増大して暫定素数と確定素数の乖離は拡大します

・3.2重複徐余率は、Pnを$r_0$迄の各素因数で割った時に複数の徐余=0が発生した場合の過剰徐余=0項目の過剰分を合計した値でその区間sqでの徐余=0の集中度を表す尺度になります
この3.2は2と同じ傾向で推移しており、
3.2重複徐余率が小さい→徐余=0が分散している→ 2暫定素数の減少の原因と考えられます
注：3.2は平均値(グラフ位置)は10倍していますが、平均値に対する変動分は2と同じ倍率で表示してあり、両者の一致状態がよくわかります

・3.3計算素数率は横軸区間sqに対して3.1の$h_x(r_{sq0+sq})$をプロットしたものです
3.3は3.1確定素数率より常に10%程度上まっており、$h_x(r_{sq0})$の横線が2暫定素数率の収束値に一致している事より、2暫定素数率の初期(sq=0)での落ち込み(3.2原因による)が原因していると考えられます

・3.9はPn=$r_0^2$+nの各sq区間でのn=0の初期値:横軸=0点に値する増分($r_{sq}^2$-$r_0^2$)を表示しています
図2.2.1-2の各区間の傾斜が各区間の長さを表示しています。最小値=2は双子の場合になりす

### 2.2.2 全体的傾向

以上は、$r_0$=547(sq$_0$=100)の例ですが、$r_0$の値を変えても定性的には同じ傾向が見えますが,
定量的には下記の変化が見られます

i $r_0$, sq$_0$を大きくすると、**2暫定素数率の平均値への収束速度**が遅くなります

・図2.2.2-1の$r_0$=2,731の例を参照。横軸最終sq=799でも平均値に達していません

・図2.2.2-2は図2.2.2-1の横軸0～799をSkipしてその先の区間800から800区間分を表示したものです
本図の区間600(図2.2.2-1の先頭からは800+600=1400区間)のあたりで平均レベルに到達しています

ii $r_0$, sq$_0$を大きくすると、**2暫定素数率等**の区間毎のバラツキが減少します。特に初期区間で
これは、$r_0$, sq$_0$を増大すると、区間長が増大し、この平均化効果によるものと思われます

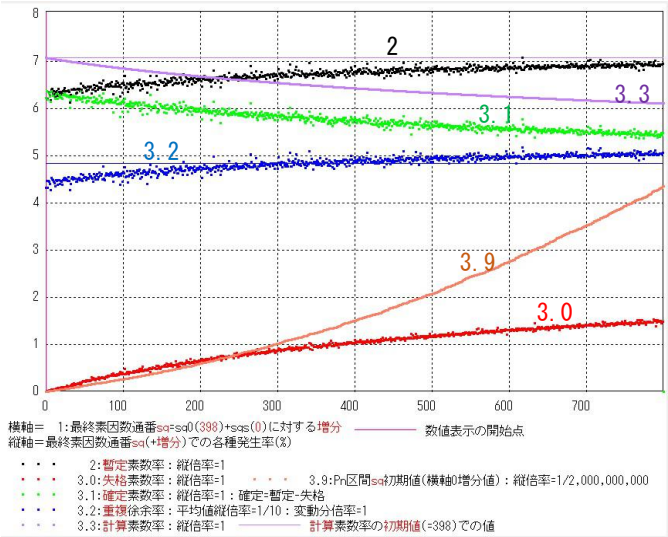
iii 補注：図2.2.2-2の3.2のレベルがズレているのは、各グラフ範囲で平均値処理している事によります

iv **結論：3.3の計算素数率が3.1の確定素数率と乖離があるのは、**

・**計算素数率は、暫定素数率の全平均値に一致**しますが、

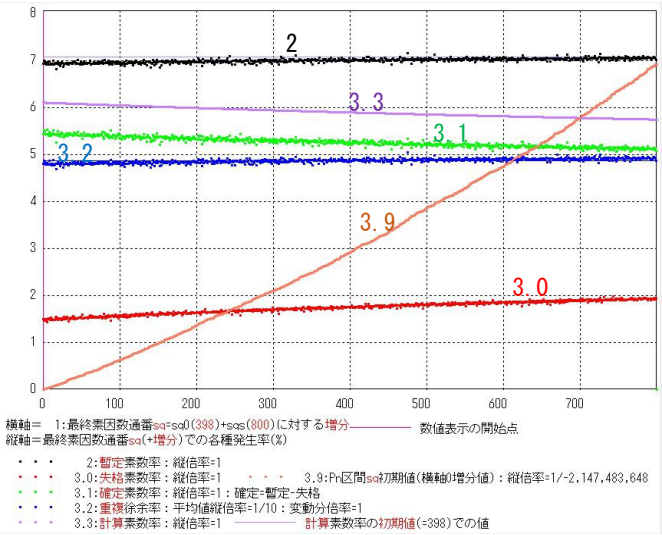
・暫定素数率は初期(sq=0～)段階では、全平均値に達しません。図2.2.1-1、2.2.2-1を参照
特に確定素数率に致するsq=0を含めて平均値(=計算素数率)-10%のレベルです

・暫定素数率の初期段階でのレベル低下の原因は、**3.2の過剰徐余=0が2と同じ動**きをしており、
**徐余=0となる素因数が重なる事少なく分布**していることによる、と考えられます
どうして初期段階で徐余=0がバランスよく分布するのかは、解明できておりません




入力値=sq0, sqc(, sps)=398, 800：機3.5-ⅱを参照

図2.2.2-1 sq$_0$=398($r_0$=2,731)の先頭0～799区間分の状況




入力値=sq0, sqc(, sps)=398, 800, 800：機3.5-ⅱを参照

図2.2.2-2 図2.2.2-1の後端から800区間分の状況

## 2.3 素因数を共有する素数：その全貌

素因数通番sq0を可変して、各sq0点でのGap分布を中心に調べた例を図2.3-1/2に示します。

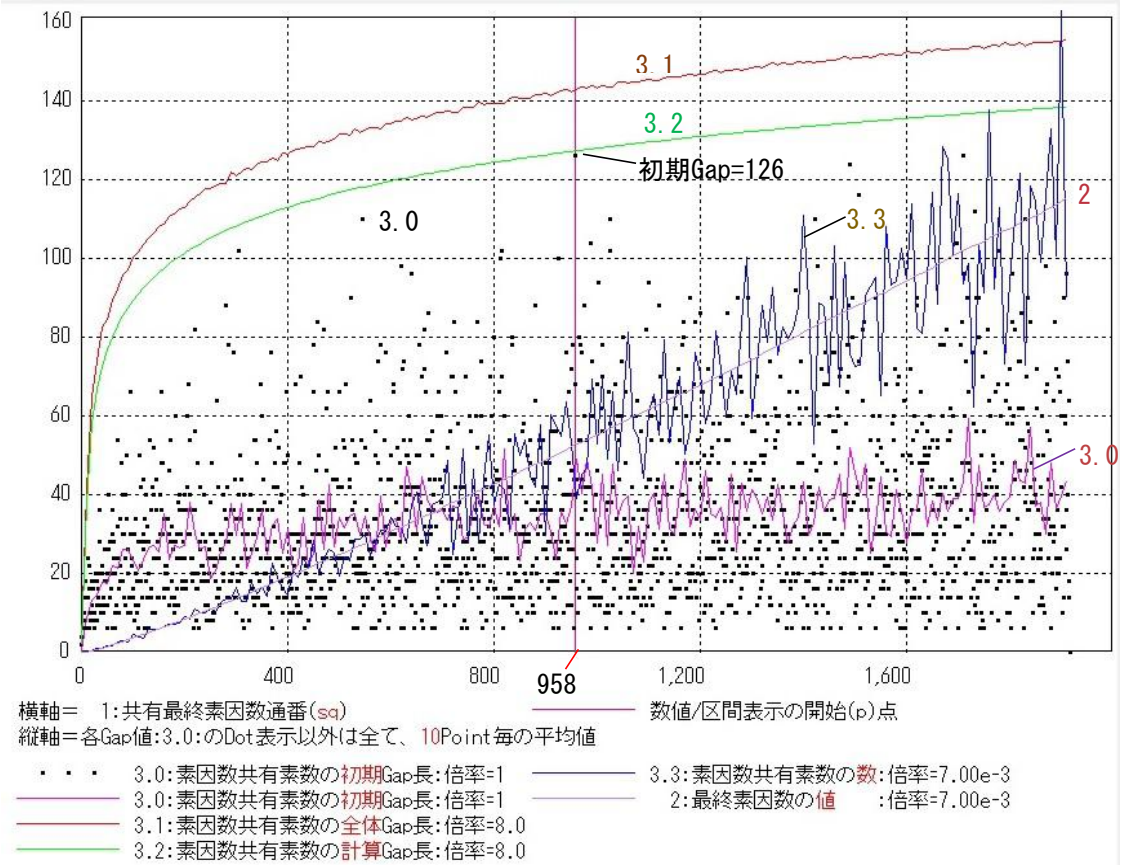



図2.3-1 各素因数(Max=1917)を共有する素数の各種素数間Gapの発生状況

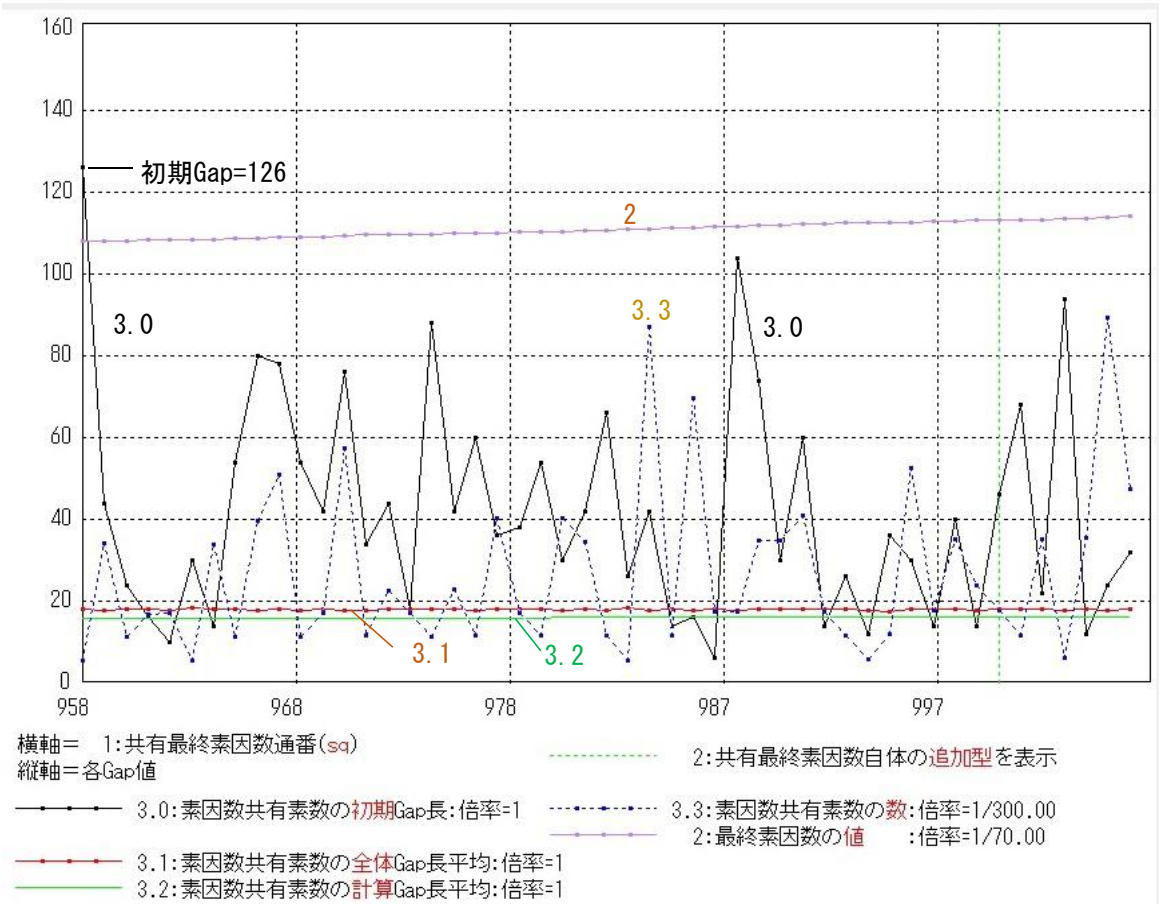



図2.3-2 素因数(Max=1917)を共有する素数の発生状況：図2.3-1の横軸=958からの詳細図(958～1,007)

図2.3-1/2の概要を以下に要約します

ⅰ 図2.3-1/2共横軸は2.2項の**最終素因数sq0**に相当します

2.2項では**sq0=500**位が処理時間限界ですが、図2.3-1では最数素因数**sq0=1917**までの各sq0の状態を表示しています。図2.3-2では図2.3-1で指定された**sq**(=958)から50sq分を詳細表示しています

ⅱ 図2.3-1では、

・**3.0:初期Gap=P1-P0**で、P1=(sq)の最初の素数,P0=(sq-1)の最終素数で横軸各素因数sqに対応して倍率=1でドットのまま表示しています。ⅳ項を参照

**曲線の3.0:初期Gap長は連続素因数10個毎の平均値**をPlotしています。バラツキは低減します

・3.1:**全体Gap**は各sq区間の各素数間の平均Gapで縦軸8倍で示してあります

・3.2:**計算Gap**は各sq区間の各素数間の平均Gapの計算値(3.2項の$h_x$(sq))で縦軸8倍であります

3.1の-10%になります。2.1-ⅲ参照

ⅲ 図2.3-2では、

図2.3-1で指定されたsq(図2.3-1ではsq=958)点から50sq分を拡大表示しており、凡て折れ線で図2.3-1と同じ項目がPlotされています。但し表示倍率は調整してあります

sq=958区間の**初期Gap**=126で極端な例です

ⅳ **初期Gapの特異性**

図2.2-2の例は極端として、**初期Gap平均/区間平均Gap=2**程度になっている事がわかります

以下図2.3-3を基にこの原因を探ります：本図にて、

図2.3-3にて、

・P0=$r_i^2$に最も近い素数

=(i-1)**区間**の最数素数

・$r_i^2$=i**区間**の初期整数

| i=sq=素因数番号 | | |
|---|---|---|
| i-1 | | i |
| (i-1)**区間の最終素数**= P0 | $r_i^2$ | P1 =(i)**区間の最初の素数** |

**図2.3-3 素因数境界で素数発生状況：$r_i^2$も(i-1)区間の(暫定)素数**

・P1=$r_i^2$以降の最初の素数

・i-1区間から見ると、

P0,$r_i^2$,P1とも全てこの**区間の(暫定)素数**で有ります。2.2項を参照

更には、**$r_i^2$～P1間**には(i-1)区間の失格素数が入り込んでいる可能性もあります

・従って、初期Gap=P1-P0は少なくとも3個素数間のGapに相当し、初期Gapがこの近辺Gap長の2倍強になるのは頷けます

元より初期Gapは(i)区間の単独Gapでそのバラツキは大きくなります

## 3 補足：Gap分布解析の一般化

1項では、Gap分布に就いて**単独/双子素数**とも互いの**最小素因数r(3/5)**の徐余影響について解析しましたが、ここでは、**素因数r,G=Cn+k**として一般化して考えます

結論として、**単独素数は3n+k分布**、**双子素数は5n+k分布**が主要なGap分布である事が分かります

## 3.1 単独素因数(P,Q=P+2G)

・P%r=x={0,1,2,..r-1}に対して,Q%r=y=(x+2G)%rとなります

・G=Cn+k:Cは素数として、k={0,1,2,...C-1}となります

Q%r=y=(x+2・(Cn+k))%r=(x+2Cn+2k)%r

### i 概要

y=(x+2Cn+2k)%r:k={0,1,2,...C-1}:C=rではy=(x+2rn+2k)%r=(x+2k)%rでnに無関係になります

| | n↓ | k↓ | x= | 0 | 1 | 2 | 3 | ・・・ | r-2 | r-1 | ok組数(x・y=0以外になるx位置の数) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ・C=rではn=0でkとyの | 0 | 0 | y= | 0 | 1 | 2 | 3 | ・・・ | r-2 | r-1 | r-1 | 1～r-1範囲に0無し |
| 関係は共に一巡する | 0 | 1 | y= | 2 | 3 | 4 | 5 | ・・・ | 0 | 1 | r-2 | |
| ・C>rではyが一巡しても | 0 | | | | ・・・・ | | | ・・・ | | | r-2 | 1～r-1範囲に0有り |
| kは一巡していない | 0 | C-1 | y= | r-2 | r-1 | 0 | 1 | ・・・ | r-4 | r-3 | r-2 | |
| ・C<rではkが一巡しても | 1 | 0 | y= | 0 | 1 | 2 | 3 | ・・・ | r-2 | r-1 | | n>0はC≠rの場合の拡張分 |
| yは一巡していない | 1 | 1 | y= | 2 | 3 | 4 | 5 | ・・・ | 0 | 1 | | iii項 |
| ・結局C≠rではn=rで | | | | | ・・・・ | | | ・・・ | | | | |
| kとyの関係は一巡する | r-1 | C-1 | y= | r-2 | r-1 | 0 | 1 | ・・・ | r-4 | r-3 | | |
| | r | 0 | y= | 0 | 1 | 2 | 3 | ・・・ | r-2 | r-1 | | C≠rでもkとyの関係が元に戻る |

### ii C=rの素数の場合:n=0で完結(全てのnで同じ)します

・ok組数はk=0が優位でその比率ok(k)はC=rの為,下記となります

| | C=rの値:図1.1のミニグラフ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 5 | 7 | kの範囲 |
| ok(k=0)=(r-1)/((r-2)(C-1)+r-1))=(r-1)/$(r-1)^2$ | 1 | 2/4 | 4/16 | 6/36 | Cn+0 |
| ok(k>0)=(r-2)/((r-2)(C-1)+r-1))=(r-2)/$(r-1)^2$ | 0 | 1/4 | 3/16 | 5/36 | Cn+k(k=1～C-1) |
| | 2n+k | 3n+k | 5n+k | 7n+k | |

図1.1のミニグラフがこれに該当しますが、実際の値はs,wにより前後に変動します

### iii C≠rの素数とします

Q%r=y=(x+2・(Cn+k))%r=(x+2Cn+2k)%rとなりnに依存しますのでiのn=0～r-1の範囲まで広げます

・n=0とすると、y=(x+2k)%rとなり、iと同じになります

・n=rとしても、y=(x+2k)%rでiと同じになりn=0～rの範囲でyは一巡することになります

・一つのnの中では、iと同じ繰り返しになりますが、n→n+1(k=C-1→0)に超えた時の状態は、

・C<rの場合はyは一巡以上しており、

・C>rの場合はyは一巡の途中状態で残り

ますが、(n=n,k=C-1)から次の(n=n+1,k=0)区間に移った時の変化は、

(x+2・(C(n+1)+0))%r-(x+2Cn+2C-2)%r=(2Cn+2C-2Cn-2C+2)%r=(+2)%r

となり同じnの中でk→k+1になったのと同じ動きになります

・n=0～r-1の間では、凡ての組合せが重複なく出現しますので、凡てのkに対してok組数は同じになりGap分布には中立になる、と考えられます

### iv 単独素数間Gap分布の結論

a:主要Gap分布3n+k分布に対するr≠3の素因数の影響は中立になる

b:2n+k分布は一様になる

c:上記以外のCn+k分布はCn+0分布が優位だが、C≧5に従って優位性は減少する

## 3.2 双子素数(P,Q=P+2),(R=P+6G,S=R+2):P≧5,r≧5の場合

・P%r=x={0,1,2,..r-1}に対して,$y_q$=Q%r=(x+2)%r,$y_r$=R%r=(x+6G)%r,$y_s$=S%r=($y_r$+2)%r とします

x=0はPが非素数で対象外です

・G=Cn+k:k={0,1,2,...C-1}とします

・$y_q$={3,4,..r-1,0,1}となりx=r-2はok対象外($y_q$=0で非素数)になります

i　概要：3.1と同様に

$y_r=(x+6Cn+6k)\%r$, $y_s=(y_r+2)\%r$となり、C=rの場合は$y_r=(x+6k)$となりnに依存しません

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | x= | 0 | 1 | 2 | 3 | ･･･ | r−2 | r−1 | $y_q$= | 2 | 3 | 4 | 5 | ･･･ | 0 | 1 | | |
| | n↓ | k↓ | $y_r=(x+6Cn+6k)\%r$ | | | | | | | | $y_s=(y_r+2)\%r$ | | | | | | | | ok組数 |
| ・C=rではn=0でkとy は | 0 | 0 | $y_r$= | 0 | 1 | 2 | 3 | ･･･ | r−2 | r−1 | $y_s$= | 2 | 3 | 4 | 5 | ･･･ | 0 | 1 | r−2 |
| 共には一巡する | 0 | 1 | $y_r$= | 6 | 7 | 8 | 9 | ･･･ | 4 | 5 | $y_s$= | 8 | 9 | 10 | 11 | ･･･ | 6 | 7 | |
| $y_r=(x+6Cn+6k)\%r=(x+6k)\%r$ | 0 | 2 | $y_r$= | 12 | 13 | 14 | 15 | ･･･ | 10 | 11 | $y_s$= | 14 | 15 | 16 | 17 | ･･･ | 12 | 13 | |
| | 0 | | | | ・・・・ | | | ・・・ | | | | | ・・・・ | | | ・・・ | | | |
| ・C>rではyが一巡しても | 0 | C−2 | $y_r$= | r−12 | r−11 | r−10 | r−9 | ･･･ | r−14 | r−13 | $y_s$= | r−10 | r−9 | r−8 | r−7 | ･･･ | r−12 | r−11 | |
| kは一巡していない | 0 | C−1 | $y_r$= | r−6 | r−5 | r−4 | r−3 | ･･･ | r−8 | r−7 | $y_s$= | r−4 | r−3 | r−2 | r−1 | ･･･ | r−6 | r−5 | |
| ・C<rではkが一巡しても | 1 | 0 | $y_r$= | 0 | 1 | 2 | 3 | ･･･ | r−2 | r−1 | $y_s$= | 2 | 3 | 4 | 5 | ･･･ | 0 | 1 | r−2 |
| yは一巡していない | 1 | 1 | $y_r$= | 6 | 7 | 8 | 9 | ･･･ | 4 | 5 | $y_s$= | 8 | 9 | 10 | 11 | ･･･ | 6 | 7 | |
| ・結局C≠rではn=rで | | | | | ・・・・ | | | | | | | | | | | | | | |
| kとyの関係は一巡する | r−1 | C−1 | $y_r$= | r−6 | r−5 | r−4 | r−3 | ･･･ | r−8 | r−7 | $y_s$= | r−4 | r−3 | r−2 | r−1 | ･･･ | r−6 | r−5 | |
| | r | 0 | $y_r$= | 0 | 1 | 2 | 3 | ･･･ | r−2 | r−1 | $y_s$= | 2 | 3 | 4 | 5 | ･･･ | 0 | 1 | |

注：各数値は%r操作されるものとします

ii　C=rの素数とします：C=r=5は表1.3.1

$y_r=(x+6G)\%r=(x+6(Cn+k))\%r=(x+6k)\%r$となりnに依存しません

i の表の中で、$y_r=0$, $y_s=0$の非素数対応部分が黒字の中にも存在しok組数から独立に除外されますが、赤字(x=0, x=r−2)に重複する部分は既に除外済ですので、ok組数から新たに除外する必要はありません

重複対応のkを求めます：　$y_r=0$となるk　　$y_s=0$となるk

・x=0　に対して$y_r$, $y_s$が0：　(0+6k)%r=0→(6k)%r=0→k=0　　(6k+2)%r=0　注1

・x=r−2に対して$y_r$, $y_s$が0：　(r−2+6k)%r=0→(6k−2)%r=0　注2　　(6k)%r=0→k=0

k=0～C−1の範囲ではこの条件を満たすkは上記の通り各1個に限られ$y_r$, $y_s$で重複しません

$y_r$, $y_s$の何れかがこのkに該当するkのok組数はr−3で2組, その他はk=0を除いてr−4でC−3組となります

全体のok組数は$r-2+(r-3)\cdot 2+(r-4)(r-3)=(r-2)^2$　　機図3.3.1のG=5n+k, 7n+k

| | ok条件 | ok組数 | C=r=5 | 組数 | C=r=7 | 組数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ok比率$(k=0)=(r-2)/(r-2)^2$ | r−2のk | 1組(k=0のみ) | 3/9 | 1 | 5/25 | 1 |
| ok比率$(k>0)=(r-3)/(r-2)^2$ | r−3のk | 2組 | 2/9 | 2 | 4/25 | 2 |
| ok比率$(k>0)=(r-4)/(r-2)^2$ | r−4のk | r−3組 | 1/9 | 2 | 3/25 | 4 |

r=Cを大きくすると、k=0の優位性は変わりませんが、その差は小さくなります

iii　C≠rの素数とします

$y_r=(x+6G)\%r=(x+6(Cn+k))\%r$となりnに依存します

・n=0とすると、$y_r=(x+6k)\%r$となり、 i と同じになります

・n=rとしても、$y_r=(x+6k)\%r$で i と同じになりn=0～r範囲内で$y_r$, $y_s$は一巡することになります

・一つのnの中では、 i と同じ繰り返しになりますが、n→n+1(k=C−1→0)に超えた時の状態は、

　・C<rの場合は$y_r$, $y_s$は一巡以上しており、

　・C>rの場合は$y_r$, $y_s$は一巡の途中状態で残り

　ますが、(n=n, k=C−1)から次の(n=n+1, k=0)区間に移った時の変化は、

　$(x+6\cdot(C(n+1)+0))\%r-(x+6Cn+6C-6)\%r=(6Cn+6C-6Cn-6C+6)\%r=(+6)\%r$

　となり同じnの中でk→k+1になったのと同じ動きになります

・n=0～r−1の間では、凡ての状態が重複なく出現しますので、凡てのkに対してok組数は同じになりGap分布は中立になる、と考えられます

・例：r=5に対してG=7n+k分布(C=7)はFlatになると考えられます：機図3.3.1の7n+k分布を参照

注1：(6k+2)%r=0の解の例：(k, r)=(3, 5), (2, 7), (7, 11), (4, 13)･･･

注2：(6k−2)%r=0の解の例：(k, r)=(2, 5), (3, 7), (4, 11), (9, 13)･･･

一般式で表現する事は困難ですが,k=0～C-1の範囲では1セットのみ存在する事は容易にわかります

(6k+2)%r=0の例：

(6k+2)%r=0～r-1の範囲になり,K=nr+kとしても、(6(nr+k)+2)%r=(6k+2)=0～r-1でk=0～r-1の範囲で(6k+2)%r=0～r-1は満たされる事になります

$k_0$,$k_1$の2個のkで(6k+2)%rが同じになったとします→$(6k_0+2)\%r=(6k_1+2)\%r$→$(6\cdot(k_0-k_1))\%r=0$→$k_0=k_1$

従って、k=0～r-1の範囲で(6k+2)%r=0となるkが1個存在します(r=C)

ⅳ **双子素数間Gap分布の結論：P≧5,r≧5の場合**

a:主要Gap分布**5n+k分布**に対する**r>5の素因数の影響は中立**なる

b:上記以外の**Cn+k分布**はCn+0分布が優位だが、C>5に従って優位性は減少する

r=2,3の場合は下記ⅴ項参照

ⅴ **G=2n+k/3n+k分布に就いて**

単独素数の場合の首記分布は3.1-ⅱ項のok(k)式が適用できますが、

双子素数に就いては、3.2-ⅱのok(k)式は適用できませんのでここでまとめておきます

・**2n+k分布**

kに依らず、**P%2=x={0,1},Q%2=(x+2)%2=x,R%2=(P+6G)%2=P%2=x,S%2=(R+2)%2=R%2=x**

ok比率(k)=1/2　(k=0,1)　　x=1のみ生き残る

・**r>C=2**の場合

3.1-ⅲと同じ議論でFlatになります

・実発生率：機図3.3.1のミニグラフで**2n+k**分布が表示されています

横軸スクロールにより開始**s**を変えると、**下段グラフ**は0.5を中心に変動する事がわかります

・**3n+k分布**

kに依らず、**P%3=x={0,1,2},Q%3=q=(x+2)%3={2,0,1},R%3=(P+6G)%3=P%3=x,S%3=(R+2)%3=Q%3=q**

ok比率(k)=1/3　(k=0,1,2)　x=2のみ生き残る

・**r>C=3**の場合

3.1-ⅲと同じ議論でFlatになります

・実発生率：機図3.3.1のミニグラフで**3n+k**分布が表示されています

横軸スクロールにより開始**s**を変えると、**下段グラフ**は1/3を中心に変動する事がわかります