

# ベッセル・フィルタの周波数補正問題(1.02 版)

2024 年 5 月 24 日(初版)

2024 年 6 月 24 日(1.02 版)

マイコン技研 Maikon-Giken

澤田 明 Akira Sawada

注:各社のツールの状況は本稿発行時点のものである

## 1. はじめに

アナログのアクティブ・フィルタを設計するには、設計条件としてカットオフ周波数  $f_c$  と回路のクオリティ・ファクタ  $Q$  が必要になる。ここでカットオフ周波数とは、ゲインが  $1/\sqrt{2}$  ( $-3.0103\text{dB}$ )になる周波数であり、1 次フィルタもバターワース・フィルタもそのようになっている。

一方でベッセル・フィルタの場合、希望のカットオフ周波数を用いて回路設計を行うと希望のカットオフ周波数におけるゲインが  $1/\sqrt{2}$  にならないため、周波数補正值  $f_{oc}$  を乗じた周波数(=折点周波数  $f_o$ )で回路設計を行う必要がある。

1 次フィルタやバターワース・フィルタから考えて当然ながら周波数補正值はゲインが  $1/\sqrt{2}$  になる周波数を基準に算出すべきであるが、 $1/\sqrt{2}$  のデシベル表記である  $-3\text{dB}$  を  $-3.0000\text{dB}$  だと思って計算した人がいて、不幸にしてその数表が広まっている(参考文献 1)。 $\pi=3.14$  と書いても誰も  $3.14000$  だとは思わないであろうが、 $-3\text{dB}$  が  $1/\sqrt{2}$  のデシベル表記だということを世間一般には周知されていないためこのような事態が生じているのであろう。

ゲイン  $1/\sqrt{2}$  と  $-3.0000\text{dB}$  での周波数差は次数にもよるが  $+0.16\%$  前後であり、実用的には問題ないであろう。しかし周波数補正值として書かれている有効数字 6 桁の数値としては間違いと言わざるを得ない。また  $-3\text{dB}$  前後の荒い補正值(参考文献 2,3 およびテキサス・インスツルメンツ社の Filter Design Tool)もよく見かけ、こちらは次数により  $-0.8\% \sim +0.3\%$  程度の誤差が出ている。

本稿ではベッセル特性のゲインが  $1/\sqrt{2}$  になる周波数を求め、正しい周波数補正值を算出した。すでにこれらの内容は誰かがどこかで発表済みかもしれないが、2024 年 5 月発行の参考文献 1 でも修正されていない点を鑑みてあえて発表するものである。

## 2. 2 次ベッセル・フィルタ

まずは解析が容易な 2 次で計算してみる。2 次ベッセル・フィルタの伝達関数は次のようになる。

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{3}{s^2 + 3s + 3} \quad (\text{式 2-1})$$

一方、ローパス・フィルタの伝達関数は、回路設計上の折点角周波数  $\omega_o$  と  $Q$  を用いて次のように表せる。

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\omega_o^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} \quad (式 2-2)$$

これらの式を見比べると容易に  $\omega_o = \sqrt{3}$  と求められ、 $\omega = \omega_o$  におけるゲイン(絶対値)は、

$$G(\omega_o) = \left| \frac{3}{(j\sqrt{3})^2 + 3(j\sqrt{3}) + 3} \right| = 1 / \sqrt{3} \quad (-4.77\text{dB}) \quad (式 2-3)$$

となる。

逆にゲイン  $1/\sqrt{2}$  となる角周波数  $\omega_c$  を求めるには

$$G(\omega_c) = \left| \frac{3}{(j\omega_c)^2 + 3(j\omega_c) + 3} \right| = 1 / \sqrt{2} \quad (式 2-4)$$

を満たせば良い。実際には絶対値の二乗で計算する方が楽なので、

$$\begin{aligned} G(\omega_c)^2 &= \frac{9}{|3 - \omega_c^2 + j3\omega_c|^2} = \frac{9}{(3 - \omega_c^2)^2 + 9\omega_c^2} \\ &= \frac{9}{\omega_c^4 + 3\omega_c^2 + 9} = 1/2 \end{aligned} \quad (式 2-5)$$

となれば良い。これより

$$\omega_c^4 + 3\omega_c^2 - 9 = 0 \quad (式 2-6)$$

の方程式が得られる。これを二次方程式の解の公式で解くと、

$$\omega_c^2 = (-3 + \sqrt{3 \times 3 + 4 \times 9}) / 2 = -1.5 + \sqrt{11.25} \quad (式 2-7)$$

と求まる。前述の通り  $\omega_o = \sqrt{3}$  であるから、周波数補正值 foc は、

$$\begin{aligned} \text{foc} &= \omega_o / \omega_c = \sqrt{3} / \sqrt{-1.5 + \sqrt{11.25}} \\ &= 1 / \sqrt{-0.5 + \sqrt{1.25}} = \sqrt{0.5 + \sqrt{1.25}} \end{aligned} \quad (式 2-8)$$

と求まる。foc の有効数字 6 桁は 1.27202 となる。

一方、比較のため -3.0000dB の場合を計算してみると、式 2-5 は、

$$9 / (\omega_c^4 + 3\omega_c^2 + 9) = 10^{(-3/20 \cdot 2)} \quad (式 2-9)$$

となり、式 2-6 は

$$\omega_c^4 + 3\omega_c^2 - 8.957360835 = 0 \quad (式 2-10)$$

という方程式になる。これを解けば

$$\begin{aligned} \omega_c^2 &= -1.5 + \sqrt{11.20736083} \\ \text{foc} &= \omega_o / \omega_c = 1 / \sqrt{-0.5 + \sqrt{1.245262315}} = 1.27421 \end{aligned} \quad (式 2-11)$$

が得られる。  $1/\sqrt{2}$  で求めた数値に対して foc が 0.17% 大きくなっている。

### 3. ゲインが $1/\sqrt{2}$ になるカットオフ角周波数 $\omega_c$ の求め方(一般式)

高次ベッセル・フィルタの場合も結局は式 2-5 と同様に

$$G(\omega_c)^2 = 1/2$$

として方程式を展開すれば良いが、次数が高くなると二乗による方程式の展開が面倒になる。実際の解き方としてはニュートン・ラフソン法による数値計算を行うのが簡単であるので、展開せずに計算する方法を考えてみる。

式 2-5 の一般形は、

$$G(\omega_c)^2 = \left| \frac{K}{R(\omega_c) + jI(\omega_c)} \right|^2 = \frac{K^2}{R(\omega_c)^2 + I(\omega_c)^2} = 1/2 \quad (\text{式 3-1})$$

と表すことができ、これより、

$$F(\omega_c) = R(\omega_c)^2 + I(\omega_c)^2 - 2K^2 = 0 \quad (\text{式 3-2})$$

という方程式が得られる。ここでベッセル・フィルタの伝達関数から  $R, I$  を求めるのが面倒と思われるかもしれないが、実はベッセル・フィルタの伝達関数は  $R, I$  を先に求め、その式に  $\omega = -js$  を代入して得ているので元々求まっているのである。

ニュートン・ラフソン法を適用するには  $F(\omega_c)$  を微分する必要があり、次のように求まる。

$$F'(\omega_c) = 2R'(\omega_c)R(\omega_c) + 2I'(\omega_c)I(\omega_c) \quad (\text{式 3-3})$$

結局ニュートン・ラフソン法により

$$\omega_{cn+1} = \omega_{cn} - F(\omega_{cn}) / F'(\omega_{cn}) \quad (\text{式 3-4})$$

を反復計算すれば  $\omega_c$  が求まる。

### 4. 回路設計上の折点角周波数 $\omega_o$ の求め方(一般式)

ベッセル・フィルタの伝達関数の分母を  $T(s)$  とし、 $T(s)$  を 2 次および 1 次(奇数次の場合のみ)の項に因数分解できたとする。

$$\text{偶数次 } T(s) = (s^2 + p_1s + q_1) \cdot (s^2 + p_3s + q_3) \cdots \quad (\text{式 4-1})$$

$$\text{奇数次 } T(s) = (s + p_n) \cdot (s^2 + p_1s + q_1) \cdot (s^2 + p_3s + q_3) \cdots \quad (\text{式 4-2})$$

これより、

$$\omega_{oi} = \sqrt{q_i} \quad (2 \text{ 次項}) \quad (\text{式 4-3})$$

$$\omega_{oi} = p_i \quad (1 \text{ 次項}) \quad (\text{式 4-4})$$

として  $\omega_o$  が求まる。周波数補正值  $foc$  は

$$foc_i = \omega_{oi} / \omega_c \quad (\text{式 4-5})$$

で求まる。また  $\omega_o$  が求めれば 2 次項の  $Q$  も次式で求まる。

$$Q_i = \omega_{oi} / p_i \quad (\text{式 4-6})$$

$n$  次方程式の因数分解の方法として、ヒッチコック・ベアストウ法がある。1 つの 2 次の項を反復法で算出し、残った  $n-2$  次方程式からさらに 1 つの 2 次の項を反復法で算出するということを繰り返して、最終的に 2 次または 1 次の項が残る方法である。プログラム手順的に説明すると次のようにな

る。

①事前準備:配列 a, b, c と変数 p, q, dp, dq, r を用意する。

配列 a に方程式の係数を次数の高い順に格納する。従って a(0)には一番次数の高い係数(=1)を格納し、a(n)には最後の定数項を格納する。また b(0) = c(0) = 1 とし、さらに収束判定用の定数を e(例えば 1e-11)とする。

②2 次項を求めることの初期化:  $p = q = 1$

③2 次項を求める反復計算

$$b(1) = a(1) - p, \quad b(i) = a(i) - p*b(i-1) - q*b(i-2) \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

$$c(1) = b(1) - p, \quad c(i) = b(i) - p*c(i-1) - q*c(i-2) \quad (i = 2, 3, \dots, n-1)$$

$$r = c(n-2)*c(n-2) - (c(n-1) - b(n-1)) * c(n-3)$$

$$dp = (b(n-1)*c(n-2) - b(n)*c(n-3)) / r$$

$$dq = (-b(n-1)*(c(n-1) - b(n-1)) + b(n)*c(n-2)) / r$$

$$p = p + dp, \quad q = q + dq$$

ここで、 $\text{abs}(dp) > e$  または  $\text{abs}(dq) > e$  であれば上記の式を繰り返す。

④p, q が求まった後の処理

式 4-3, 4-5 から  $\omega_o$ , foc を求め、必要があれば式 4-6 から Q も求める。

続いて残った方程式を解く準備を行う。

$$n = n - 2$$

$$a(i) = b(i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ここで  $n > 2$  なら②から繰り返す。

$n = 2$  なら a に 2 次項が残っているので、 $p = a(1)$ ,  $q = a(2)$ として  $\omega_o$ , foc, Q を求める。

$n = 1$  なら a に 1 次項が残っているので、 $p = a(1)$ として式 4-4 から  $\omega_o$  を求める。

## 5. 計算プログラム例

別途資料 Bessel.BAS に [10 進 BASIC](#) 用のソース・プログラムを示す。実行開始後にファイル名を入力すれば、2～10 次の foc, Q をファイルに出力する。既存のファイル名を指定した場合は追記を行う。

実用的な意味はないが、以下の変更により最大 215 次まで有効数字 700 桁近い値が求まる。

- 9 行目先頭の!を消す(OPTION ARITHMETIC DECIMAL\_HIGH を有効にする)
- 10 行目 nmax = 50 程度にする (215 を指定すると長時間かかる)
- 11 行目 e = 1e-700 にする

また次数を1つ1つ指定したい場合は、13 行目を= 1 に変更する。

## 6. 周波数補正值の計算結果

表 1 に 2 次～7 次までの補正值の計算結果を示す。参考に-3.0000dB での数値と Q も示す。

表 1 ベッセル特性の設計表

次数	段目	本計算による foc $1/\sqrt{2}$ (-3.0103dB) で周波数補正	文献(1) foc -3.0000dB で周波数補正	Q
2	1	$\sqrt{0.5 + \sqrt{1.25}} =$ 1.27202	1.27420	$1 / \sqrt{3} =$ 0.57735
3	1	1.32268	1.32475	—
	2	1.44762	1.44993	0.69105
4	1	1.43017	1.43241	0.52193
	2	1.60336	1.60594	0.80554
5	1	1.50232	1.50470	—
	2	1.55635	1.55876	0.56354
	3	1.75538	1.75812	0.91648
6	1	1.60392	1.60653	0.51032
	2	1.68917	1.69186	0.61119
	3	1.90471	1.90782	1.02331
7	1	1.68437	1.68713	—
	2	1.71636	1.71911	0.53236
	3	1.82242	1.82539	0.66082
	4	2.04949	2.05279	1.12626

### ■■参考文献■■

- (1)西野直樹, 今関雅敬 : トランジスタ技術エンジニア手帳 2004, トランジスタ技術 2024 年 5 月号別冊付録 1, CQ 出版社
- (2)アナログ・デバイセズ(株) : OP アンプによるフィルタ回路の設計, 2005 年, CQ 出版社
- (3)Hank Zumbahlen : アナログ・デバイセズのアクティブ・フィルタ・デザイン・ツールの使い方, Rev.0, アプリケーション・ノート(AN-649) (<https://www.analog.com/jp/resources/app-notes/an-649.html>), アナログ・デバイセズ(株)

## 改訂履歴

版	日付	記事
1.0 版	2024/5/24	新規作成
1.01 版	2024/6/8	用語修正：回路設計上のカットオフ角周波数→回路設計上の折点角周波数
1.02 版	2024/6/24	記号修正：周波数補正值の記号を <b>foc</b> に変更( <b>fo</b> は折点周波数とするため)