

## 母比率 $p$ の信頼区間について

確率変数  $X$  が二項分布  $B(n, p)$  に従うとき、

$$\text{平均 } E(X) = np, \text{ 分散 } V(X) = np(1-p)$$

である。従って、

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

としたとき、 $n$  が十分大きいと、 $Z$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う。(中心極限定理)

一方、標本比率  $\hat{p} = \frac{X}{n}$  である。

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\frac{X - np}{n}}{\sqrt{\frac{np(1-p)}{n^2}}} = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

となるので、 $n$  が十分大きいと、

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \text{ も標準正規分布 } N(0, 1) \text{ に従う。}$$

ということは、 $\hat{p}$  は近似的に正規分布  $N(p, \frac{p(1-p)}{n})$  に従う。

$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$  が標準正規分布  $N(0, 1)$  に従うから、有意水準を  $\alpha$  とする

信頼区間を  $[-k_{\alpha/2}, k_{\alpha/2}]$  として、

$$-k_{\alpha/2} \leq Z \leq k_{\alpha/2} \text{ とした時、 } -k_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq k_{\alpha/2} \text{ となるので、}$$

$$-k_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \hat{p} - p \leq k_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ であり、}$$

$$p \leq \hat{p} + k_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ かつ } \hat{p} - k_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \text{ であるから、}$$

$$\hat{p} - k_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{p} + k_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ となる。}$$

ここで  $\hat{p}$  は  $p$  の一致推定量なので、 $p$  を  $\hat{p}$  に置き換えて、

$$\hat{p} - k_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + k_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

となる。