

## 平均、分散

母集団の平均を  $\mu$ 、分散を  $\sigma^2$  とする。  
そこから得られた標本データについて

- ・ データ数を  $n$
- ・ 標本データを  $\{x_i\}_{i=1}^n$

とする。

### 1. 平均

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

この  $\bar{x}$  は 標本平均と呼び、母集団の平均（母平均）  $\mu$  の  
不偏推定量 かつ 一致推定量 となる。

### 2. 分散

標本分散  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  は、母集団の分散（母分散）  $\sigma^2$   
の一致推定量だが、不偏推定量ではない。

一方、不偏分散  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  は、 $\sigma^2$  の不偏推定量 かつ  
一致推定量 となる。

(呼び方の習慣ですが、 $s^2$  を標本分散と呼ぶ流儀もあります。どちらが  
正しい？は置いといて、ここでは  $n$  で割る  $\hat{\sigma}^2$  を標本分散、 $n-1$  で割る  $s^2$   
を不偏分散と呼びますので、ご了承ください)

$$\begin{aligned} & E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu + \mu - \bar{x})^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + 2\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(\mu - \bar{x}) + \sum_{i=1}^n (\mu - \bar{x})^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu)\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) + \sum_{i=1}^n (\mu - \bar{x})^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu)(\sum_{i=1}^n x_i - n\mu) + n(\bar{x} - \mu)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu)(n\bar{x} - n\mu) + n(\bar{x} - \mu)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2n(\bar{x} - \mu)^2 + n(\bar{x} - \mu)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - n(\bar{x} - \mu)^2\right] \end{aligned}$$

上式の第1項については、 $E[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2] = n\sigma^2$  であり、  
上式の第2項については、

$$E[n(\bar{x} - \mu)^2] = nE[(\bar{x} - \mu)^2] = nV\left[\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i)\right] = n\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n V[x_i] = \sigma^2$$

であるので、 $E[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2] = (n-1)\sigma^2$  となり、結局

$$E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right] = \sigma^2 \text{ となる。}$$

\*) 推定量の特性について

- ・ 不偏推定量： 未知母数  $\theta$  の推定量  $\hat{\theta}$  が、 $E(\hat{\theta}) = \theta$  を満たすとき、  
 $\hat{\theta}$  は  $\theta$  の不偏推定量という。
- ・ 一致推定量： 未知母数  $\theta$  の推定量  $\hat{\theta}$  が、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、  
 $n \rightarrow \infty$  の時  $P(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$   
を満たすとき、 $\hat{\theta}$  は  $\theta$  の一致推定量という。