

数量化Ⅱ類

要因の個数を K 、要因の添え字 i ($i = 1 \sim K$) とする。
 要因 i のカテゴリ数を ℓ_i 、要因 i のカテゴリの添え字を α_i ($\alpha_i = 1 \sim \ell_i$) とする。

外的基準によって分類されるグループ数を M とする。
 各グループに属するサンプル数を $n_1 \sim n_M$ とする。

全サンプル数 $N = \sum_{r=1}^M n_r$ とする。

サンプルデータ x_{i,α_i}^{r,ν_r} を以下とする。

$= 1$: グループ r のサンプル ν_r が、要因 i の第 α_i カテゴリに反応した時
 $= 0$: グループ r のサンプル ν_r が、要因 i の第 α_i カテゴリに反応しない時

- $i = 1 \sim K$ 、 $\alpha_i = 1 \sim \ell_i$
- $r = 1 \sim M$ 、 $\nu_r = 1 \sim n_r$ について

任意の r 、任意の ν_r について、 $\sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r} = 1$

であり、したがって $\sum_{i=1}^K \left(\sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r} \right) = K$ である。

$r = 1 \sim M$ 、 $\nu_r = 1 \sim n_r$ について

$$y^{r,\nu_r} = \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r} a_{i,\alpha_i}$$

とする。目的は各グループがよく分離できるように a_{i,α_i} を定めること。

y^{r,ν_r} の全分散を σ^2 、グループ間分散を σ_B^2 として $\eta^2 = \frac{\sigma_B^2}{\sigma^2}$

を最大にする a_{i,α_i} を定める。

各グループ内平均 :

$r = 1 \sim M$ 、 $\nu_r = 1 \sim n_r$ として

$$\bar{y}^r = \frac{1}{n_r} \sum_{\nu_r=1}^{n_r} y^{r,\nu_r} = \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \bar{x}_{i,\alpha_i}^r a_{i,\alpha_i}$$

$$\bar{x}_{i,\alpha_i}^r = \frac{1}{n_r} \sum_{\nu_r=1}^{n_r} x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r} \quad (r = 1 \sim M, i = 1 \sim K, \alpha_i = 1 \sim \ell_i)$$

全平均 :

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M n_r \bar{y}^r = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M n_r \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \bar{x}_{i,\alpha_i}^r a_{i,\alpha_i} \\ &= \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M n_r \bar{x}_{i,\alpha_i}^r \right\} a_{i,\alpha_i} \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{x}_{i,\alpha_i} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M n_r \bar{x}_{i,\alpha_i}^r$ とすると

上式 $\bar{y} = \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \bar{x}_{i,\alpha_i} a_{i,\alpha_i}$ となる。

$$\begin{aligned} \text{全分散} : \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M \sum_{v_r=1}^{n_r} (y^{r,v_r} - \bar{y})^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M \sum_{v_r=1}^{n_r} \left\{ \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} a_{i,\alpha_i} - \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \bar{x}_{i,\alpha_i} a_{i,\alpha_i} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M \sum_{v_r=1}^{n_r} \left\{ \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} (x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} - \bar{x}_{i,\alpha_i}) a_{i,\alpha_i} \right\}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{級間分散} : \sigma_B^2 &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M n_r (\bar{y}^r - \bar{y})^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M n_r \left\{ \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \bar{x}_{i,\alpha_i}^r a_{i,\alpha_i} - \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \bar{x}_{i,\alpha_i} a_{i,\alpha_i} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M n_r \left\{ \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} (\bar{x}_{i,\alpha_i}^r - \bar{x}_{i,\alpha_i}) a_{i,\alpha_i} \right\}^2 \end{aligned}$$

ここで a_{i,α_i} ($i = 1 \sim K, \alpha_i = 1 \sim \ell_i$) $L = \sum_{i=1}^K \ell_i$ は L 個の変数とする。

目的は $\eta^2 = \frac{\sigma_B^2}{\sigma^2}$ を最大にする a_{i,α_i} を定めることなので、

$\frac{\partial \eta^2}{\partial a_{j,\beta_j}} = 0$ ($j = 1 \sim K, \beta_j = 1 \sim \ell_j$) となる $\{a_{j,\beta_j}\}$ を求める。

$$\frac{\partial \eta^2}{\partial a_{j,\beta_j}} = \frac{\partial(\sigma_B^2/\sigma^2)}{\partial a_{j,\beta_j}} = \frac{\frac{\partial(\sigma_B^2)}{\partial a_{j,\beta_j}} \sigma^2 - \sigma_B^2 \frac{\partial(\sigma^2)}{\partial a_{j,\beta_j}}}{(\sigma_B^2/\sigma^2)^2} = 0$$

なので、

$$\frac{\partial(\sigma_B^2)}{\partial a_{j,\beta_j}} \sigma^2 = \sigma_B^2 \frac{\partial(\sigma^2)}{\partial a_{j,\beta_j}} \quad \text{つまり}$$

$$\frac{\partial(\sigma_B^2)}{\partial a_{j,\beta_j}} = \frac{\sigma_B^2}{\sigma^2} \frac{\partial(\sigma^2)}{\partial a_{j,\beta_j}}$$

となる。

まず

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M n_r \left\{ \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} (\bar{x}_{i,\alpha_i}^r - \bar{x}_{i,\alpha_i}) a_{i,\alpha_i} \right\}^2 \quad \text{なので}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_B^2}{\partial a_{j,\beta_j}} &= \frac{\partial \left[\frac{1}{N} \sum_{r=1}^M n_r \left\{ \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} (\bar{x}_{i,\alpha_i}^r - \bar{x}_{i,\alpha_i}) a_{i,\alpha_i} \right\}^2 \right]}{\partial a_{j,\beta_j}} \\ &= \frac{2}{N} \sum_{r=1}^M n_r \left\{ \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} (\bar{x}_{i,\alpha_i}^r - \bar{x}_{i,\alpha_i}) a_{i,\alpha_i} \right\} (\bar{x}_{j,\beta_j}^r - \bar{x}_{j,\beta_j}) \\ &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \sum_{r=1}^M n_r (\bar{x}_{i,\alpha_i}^r - \bar{x}_{i,\alpha_i}) (\bar{x}_{j,\beta_j}^r - \bar{x}_{j,\beta_j}) a_{i,\alpha_i} \end{aligned}$$

更に

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M \sum_{\nu_r=1}^{n_r} \left\{ \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} (x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r} - \bar{x}_{i,\alpha_i}) a_{i,\alpha_i} \right\}^2 \quad \text{なので} \\ \frac{\partial \sigma^2}{\partial a_{j,\beta_j}} &= \frac{2}{N} \sum_{r=1}^M \sum_{\nu_r=1}^{n_r} \left\{ \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} (x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r} - \bar{x}_{i,\alpha_i}) (x_{j,\beta_j}^{r,\nu_r} - \bar{x}_{j,\beta_j}) a_{i,\alpha_i} \right\} \\ &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \sum_{r=1}^M \sum_{\nu_r=1}^{n_r} (x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r} - \bar{x}_{i,\alpha_i}) (x_{j,\beta_j}^{r,\nu_r} - \bar{x}_{j,\beta_j}) a_{i,\alpha_i} \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{\partial(\sigma_B^2)}{\partial a_{j,\beta_j}} = \eta^2 \frac{\partial(\sigma^2)}{\partial a_{j,\beta_j}} \quad (\eta^2 = \frac{\sigma_B^2}{\sigma^2}) \quad \text{は以下のようになる。}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \sum_{r=1}^M n_r (\bar{x}_{i,\alpha_i}^r - \bar{x}_{i,\alpha_i}) (\bar{x}_{j,\beta_j}^r - \bar{x}_{j,\beta_j}) a_{i,\alpha_i} = \\ \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \sum_{r=1}^M \sum_{\nu_r=1}^{n_r} (x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r} - \bar{x}_{i,\alpha_i}) (x_{j,\beta_j}^{r,\nu_r} - \bar{x}_{j,\beta_j}) a_{i,\alpha_i} \end{aligned}$$

$$(j=1 \sim K, \beta_j=1 \sim \ell_j)$$

$$\mathbf{a} = \{a_{j,\beta_j}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,\ell_1} \\ \vdots \\ a_{K,1} \\ \vdots \\ a_{K,\ell_K} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{全体で } L \text{ 個}$$

全体で L 個

$$\mathbf{X} = [\chi_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r}] = \left\{ \begin{pmatrix} \chi_{1,1}^{1,1} & \cdots & \chi_{1,\ell_1}^{1,1} & \cdots & \chi_{K,1}^{1,1} & \cdots & \chi_{K,\ell_K}^{1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_{1,1}^{1,n_1} & \cdots & \chi_{1,\ell_1}^{1,n_1} & \cdots & \chi_{K,1}^{1,n_1} & \cdots & \chi_{K,\ell_K}^{1,n_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_{1,1}^{M,1} & \cdots & \chi_{1,\ell_1}^{M,1} & \cdots & \chi_{K,1}^{M,1} & \cdots & \chi_{K,\ell_K}^{M,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_{1,1}^{M,n_M} & \cdots & \chi_{1,\ell_1}^{M,n_M} & \cdots & \chi_{K,1}^{M,n_M} & \cdots & \chi_{K,\ell_K}^{M,n_M} \end{pmatrix} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{全体で} \\ N \text{ 個} \end{array} \right\}$$

全体で L 個

$$\overline{\mathbf{X}}_B = [\bar{\chi}_{i,\alpha_i}^r] = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{\chi}_{1,1}^1 & \cdots & \bar{\chi}_{1,\ell_1}^1 & \cdots & \bar{\chi}_{K,1}^1 & \cdots & \bar{\chi}_{K,\ell_K}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\chi}_{1,1}^1 & \cdots & \bar{\chi}_{1,\ell_1}^1 & \cdots & \bar{\chi}_{K,1}^1 & \cdots & \bar{\chi}_{K,\ell_K}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\chi}_{1,1}^M & \cdots & \bar{\chi}_{1,\ell_1}^M & \cdots & \bar{\chi}_{K,1}^M & \cdots & \bar{\chi}_{K,\ell_K}^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\chi}_{1,1}^M & \cdots & \bar{\chi}_{1,\ell_1}^M & \cdots & \bar{\chi}_{K,1}^M & \cdots & \bar{\chi}_{K,\ell_K}^M \end{pmatrix} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{全体で} \\ N \text{ 個} \end{array} \right\}$$

全体で L 個

$$\overline{\mathbf{X}} = [\bar{\chi}_{i,\alpha_i}] = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{\chi}_{1,1} & \cdots & \bar{\chi}_{1,\ell_1} & \cdots & \bar{\chi}_{K,1} & \cdots & \bar{\chi}_{K,\ell_K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\chi}_{1,1} & \cdots & \bar{\chi}_{1,\ell_1} & \cdots & \bar{\chi}_{K,1} & \cdots & \bar{\chi}_{K,\ell_K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\chi}_{1,1} & \cdots & \bar{\chi}_{1,\ell_1} & \cdots & \bar{\chi}_{K,1} & \cdots & \bar{\chi}_{K,\ell_K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\chi}_{1,1} & \cdots & \bar{\chi}_{1,\ell_1} & \cdots & \bar{\chi}_{K,1} & \cdots & \bar{\chi}_{K,\ell_K} \end{pmatrix} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{全体で} \\ N \text{ 個} \end{array} \right\}$$

とおくと、

左辺の $\sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \sum_{r=1}^M n_r (\bar{x}_{i,\alpha_i}^r - \bar{x}_{i,\alpha_i}) (\bar{x}_{j,\beta_j}^r - \bar{x}_{j,\beta_j}) a_{i,\alpha_i} \quad (j=1 \sim K, \beta_j=1 \sim \ell_j)$

については、 $[\bar{x}_{i,\alpha_i}^r - \bar{x}_{i,\alpha_i}] = \overline{X_B} - X$ なので $S_B = (\overline{X_B} - X)^t (\overline{X_B} - X)$

とにおいて、左辺 = $S_B a$ となる。

右辺の $\sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \sum_{r=1}^M \sum_{v_r=1}^{n_r} (x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} - \bar{x}_{i,\alpha_i}) (x_{j,\beta_j}^{r,v_r} - \bar{x}_{j,\beta_j}) a_{i,\alpha_i} \quad (j=1 \sim K, \beta_j=1 \sim \ell_j)$

については、 $S = (X - \bar{X})^t (X - \bar{X})$ とにおいて、右辺 = $\eta^2 S a$ となる。

したがって、 $S_B a = \eta^2 S a$ つまり $(S_B - \eta^2 S) a = 0$ なる固有値問題となる

次に 各要因の第1 カテゴリーをすべて外す。つまり 対応するカテゴリーウェイトを 0 にする。

ベクトル a , 行列 X , \bar{X} , $\overline{X_B}$ から各要因の第1 カテゴリーに対応する要素、列を省く。

省いたものを新たに、

$$\cdot a \rightarrow a^* (a^* \text{の大きさは } L - K)$$

$$\cdot X \rightarrow X^* (X^* \text{の大きさは } (N, L - K))$$

$$\cdot \bar{X} \rightarrow \bar{X}^* (\bar{X}^* \text{の大きさは } (N, L - K))$$

$$\cdot \overline{X_B} \rightarrow \overline{X_B}^* (\overline{X_B}^* \text{の大きさは } (N, L - K))$$

とすると、

$$S_B^* \equiv (\overline{X_B}^* - X^*)^t (\overline{X_B}^* - X^*)$$

$$S^* \equiv (X^* - \bar{X}^*)^t (X^* - \bar{X}^*)$$

$$(S_B^* - \eta^2 S^*) a^* = 0$$

となる。

これを さらに 一般的な 固有値問題に帰着させるために、以下のようにする。

$$S^* = F F^t \quad \text{とすると} \quad (S_B^* - \eta^2 S^*) \mathbf{a}^* = (S_B^* - \eta^2 F F^t) \mathbf{a}^* = 0$$

$$F^{-1} (S_B^* - \eta^2 F F^t) \mathbf{a}^* = 0$$

$$(F^{-1} S_B^* - \eta^2 F^{-1} F F^t) \mathbf{a}^* = (F^{-1} S_B^* - \eta^2 F^t) \mathbf{a}^* = 0$$

$$\mathbf{a}^* = (F^t)^{-1} \mathbf{x} \quad \text{と置くと、}$$

$$(F^{-1} S_B^* - \eta^2 F^t) (F^t)^{-1} \mathbf{x} = 0$$

$$F^{-1} S_B^* (F^t)^{-1} \mathbf{x} - \eta^2 F^t (F^t)^{-1} \mathbf{x} = 0$$

$$F^{-1} S_B^* (F^t)^{-1} \mathbf{x} = \eta^2 \mathbf{x}$$

となる。

これにより、 $F^{-1} S_B^* (F^t)^{-1}$ の固有値問題となり、求めた固有ベクトルを \mathbf{x}

とすると、結果的に 固有値と固有ベクトルを求めることになる。

したがって、 $\mathbf{a}^* = (F^t)^{-1} \mathbf{x}$ が求まる。

上記で求めた 1 次元の数量により、各グループの分離が十分でない場合には、

2次元の数量化を行う。これを解くには、 $F^{-1} S_B^* (F^t)^{-1}$ の 2 番目に大きい固有値の固有ベクトルを求めれば良い。それでも、分離が十分でなければ、3 番目に大きい固有値の固有ベクトルというように計算する。

カテゴリーウェイトの基準化

上記のようにして求めたカテゴリーウェイト \mathbf{a}^* は、各要因の第1カテゴリーのウェイトを 0 として計算している。すなわち、

$a_{i,1} = 0 \quad (i=1 \sim K)$ としている。

そこで、 $r = 1 \sim M, \quad \nu_r = 1 \sim n_r$ について

$$y^{r,\nu_r} = \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r} a_{i,\alpha_i}$$

より、

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \bar{x}_{i,\alpha_i} a_{i,\alpha_i} \quad \text{を引く。}$$

ただし、 $\bar{x}_{i,\alpha_i} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M n_r \bar{x}_{i,\alpha_i}^r, \quad \bar{x}_{i,\alpha_i}^r = \frac{1}{n_r} \sum_{\nu_r=1}^{n_r} x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r}$ である。

$$y^{r,\nu_r} - \bar{y} = \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} (x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r} - \bar{x}_{i,\alpha_i}) a_{i,\alpha_i}$$

したがって、

$$\begin{aligned} y^{r,\nu_r} &= \bar{y} + \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} (x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r} - \bar{x}_{i,\alpha_i}) a_{i,\alpha_i} \\ &= \bar{y} + \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} (x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r} a_{i,\alpha_i} - \bar{x}_{i,\alpha_i} a_{i,\alpha_i}) \end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{\beta_i=1}^{\ell_i} x_{i,\beta_i}^{r,\nu_r} = 1$$

を利用して、

$$y^{r,\nu_r} = \bar{y} + \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \left(a_{i,\alpha_i} - \sum_{\beta_i=1}^{\ell_i} a_{i,\beta_i} \cdot \bar{x}_{i,\beta_i} \right) x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r} \quad (*)$$

であることを導く。これが示されれば、

$$b_{i,\alpha_i} \equiv a_{i,\alpha_i} - \sum_{\beta_i=1}^{\ell_i} a_{i,\beta_i} \cdot \bar{x}_{i,\beta_i} \quad \text{として}$$

$$y^{r,\nu_r} = \bar{y} + \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} b_{i,\alpha_i} \cdot x_{i,\alpha_i}^{r,\nu_r}$$

と表現して b_{i,α_i} が基準化されたカテゴリーウェイトとして用いられる。

以下は(*)の証明

$$\begin{aligned}
y^{r,v_r} &= \bar{y} + \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \left(a_{i,\alpha_i} \cdot x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} - a_{i,\alpha_i} \cdot \bar{x}_{i,\alpha_i} \right) \\
&= \bar{y} + \sum_{i=1}^K \left(\sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} a_{i,\alpha_i} \cdot x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} - \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} a_{i,\alpha_i} \cdot \bar{x}_{i,\alpha_i} \right) \\
&= \bar{y} + \sum_{i=1}^K \left(\sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} a_{i,\alpha_i} \cdot x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} - \sum_{\beta_i=1}^{\ell_i} a_{i,\beta_i} \cdot \bar{x}_{i,\beta_i} \right) \\
&= \bar{y} + \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} a_{i,\alpha_i} \cdot x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} - \sum_{i=1}^K \sum_{\beta_i=1}^{\ell_i} a_{i,\beta_i} \cdot \bar{x}_{i,\beta_i} \\
&= \bar{y} + \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} a_{i,\alpha_i} \cdot x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} - \sum_{i=1}^K \sum_{\beta_i=1}^{\ell_i} a_{i,\beta_i} \cdot \bar{x}_{i,\beta_i} \left(\sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} \right) \\
&= \bar{y} + \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} a_{i,\alpha_i} \cdot x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} - \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \sum_{\beta_i=1}^{\ell_i} a_{i,\beta_i} \cdot \bar{x}_{i,\beta_i} \cdot x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} \\
&= \bar{y} + \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \left(a_{i,\alpha_i} \cdot x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} - \sum_{\beta_i=1}^{\ell_i} a_{i,\beta_i} \cdot \bar{x}_{i,\beta_i} \cdot x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} \right) \\
&= \bar{y} + \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} \left(a_{i,\alpha_i} - \sum_{\beta_i=1}^{\ell_i} a_{i,\beta_i} \cdot \bar{x}_{i,\beta_i} \right) x_{i,\alpha_i}^{r,v_r}
\end{aligned}$$

要因の効果と偏相関係数について

$$\bar{y}^r = \frac{1}{n_r} \sum_{v_r=1}^{n_r} y^{r,v_r} \quad (r = 1 \sim M)$$

$$x_i^{r,v_r} = \sum_{\alpha_i=1}^{\ell_i} a_{i,\alpha_i} \cdot x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} \quad (r = 1 \sim M, i = 1 \sim K) \quad \text{とする。}$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M \sum_{v_r=1}^{n_r} x_{i,\alpha_i}^{r,v_r} \quad (i = 1 \sim K)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M n_r \bar{y}^r$$

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M \sum_{v_r=1}^{n_r} (x_i^{r,v_r} - \bar{x}_i) (x_j^{r,v_r} - \bar{x}_j) \quad (i, j = 1 \sim K)$$

$$\sigma_{i,y} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M \sum_{v_r=1}^{n_r} (x_i^{r,v_r} - \bar{x}_i) (\bar{y}^r - \bar{y}) \quad (i = 1 \sim K)$$

$$\sigma_{y,y} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^M n_r (\bar{y}^r - \bar{y})^2$$

$$r_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sqrt{\sigma_{i,i}} \sqrt{\sigma_{j,j}}} \quad (i, j = 1 \sim K)$$

$$r_{i,y} = \frac{\sigma_{i,y}}{\sqrt{\sigma_{i,i}} \sqrt{\sigma_{y,y}}} \quad (i = 1 \sim K)$$

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & r_{1,2} & r_{1,3} & \cdots & r_{1,K} & r_{1,y} \\ r_{2,1} & 1 & r_{2,3} & \cdots & r_{2,K} & r_{2,y} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & 1 & \cdots & r_{3,K} & r_{3,y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{K,1} & r_{K,2} & r_{K,3} & \cdots & 1 & r_{K,y} \\ r_{y,1} & r_{y,2} & r_{y,3} & \cdots & r_{y,K} & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad [\mathbf{K}+1, \mathbf{K}+1] \text{行列 (対称)}$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} r^{1,1} & r^{1,2} & r^{1,3} & \cdots & r^{1,K} & r^{1,y} \\ r^{2,1} & r^{2,2} & r^{2,3} & \cdots & r^{2,K} & r^{2,y} \\ r^{3,1} & r^{3,2} & r^{3,3} & \cdots & r^{3,K} & r^{3,y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r^{K,1} & r^{K,2} & r^{K,3} & \cdots & r^{K,K} & r^{K,y} \\ r^{y,1} & r^{y,2} & r^{y,3} & \cdots & r^{y,K} & r^{y,y} \end{pmatrix}$$

要因とサンプルの偏相関係数は、 $\widetilde{r}_{i,y} = \frac{-r^{i,y}}{\sqrt{r^{i,i}} \sqrt{r^{y,y}}} \quad (i = 1 \sim K)$

重相関係数は $\widetilde{r}_{y,y} = \sqrt{1 - \frac{1}{r^{y,y}}}$ となる。