

有限要素法による平面ラーメンの解析 (Ver.1.05)

2025.09

1. プログラムの概要

- 1) 本プログラム rm2dg105.exe は、有限要素法 (FEM) により平面ラーメン (骨組) を解析するものであり、バンドマトリックス法を用いて VB2022 により作成されている。本プログラムは Windows11 で動作する。
- 2) ユーザーはテキストエディター (たとえばワードパッドなど) を用いて、後に示す入力データを作成し、本プログラムはそのファイルのデータを読み込んで FEM を実行する。あるいは、別に作成した Rm2DEditor100.exe を用いて、データを作成することもできる。このソフトを用いれば GUI に基づいてデータ作成が可能であり、入力ミスも避けられるのでこちらの利用を推奨する。
- 3) 本プログラムは、最大 5000 節点まで解析可能であり、数百節点の問題であっても即座に解を得ることができる。
- 4) 解析結果は、テキストファイルで出力されるとともに、画面には平面ラーメンの変位の様子、曲げモーメント図、せん断力図および色づけされた軸力図などが表示される。
- 5) 画面に表示された変形図や曲げモーメント図などのすべての図形は、マウスの操作によって、Google Map のように自由に移動および拡大・縮小が可能である。これにより、細部の変位や曲げモーメントを調べることができる。
- 6) 最大変位や最大曲げモーメント、最大せん断力および最大軸力はただちに読み取れるように画面に表示される。
- 7) マウスを要素の中心に移動すると、その要素の両端点の曲げモーメント、せん断応力および軸力が自動的にポップアップ表示される。同様に、マウスを節点近傍に移動すると、その節点の変位成分が自動的にポップアップ表示される。

2. ユーザーが準備するデータ

本プログラムが必要とするデータは以下の通りである。

入力データの構成 (() 内の記号はプログラムで用いている変数名)

- (1) 基本データ (1 行)
総節点数(np), 総要素数(ne), 材料数(nm), 拘束節点数(nb), 荷重節点数(nf)
- (2) 節点データ (np 行)
節点番号, x 座標, y 座標
- (3) 要素データ (ne 行)
要素番号, 要素端点の節点番号, もう一方の端点の節点番号, 材料番号
- (4) 材料データ (nm 行)
材料番号, 縦弾性係数, 断面積, 断面 2 次モーメント
- (5) 節点拘束データ (nb 行)
拘束節点番号, x 方向の拘束の有無 (0 拘束なし, 1 拘束あり),
 x 方向の拘束量 (拘束がない場合は 0.0 を与える),

y 方向の拘束の有無 (0 拘束なし, 1 拘束あり),
 y 方向の拘束量 (拘束がない場合は 0.0 を与える),
 たわみ角の拘束の有無 (0 拘束なし, 1 拘束あり),
 接合強さ (半剛接の強さ λ_θ ($0 \leq \lambda_\theta \leq 1$) を与える. $\lambda_\theta = 0$ のときピン支持, 1 の場合は剛接,
 その間の値の場合は半剛接となる)

(6) 荷重データ (nf 行) (nf=0 のときには不要)

荷重をかけた節点番号, x 方向の荷重の大きさ, y 方向の荷重の大きさ, 曲げモーメントの大きさ

(7) 名前など, 問題への注釈 (1 行)

Rm2DDData (U-shaped-Frame)

以下に, 具体的な例題を通じてこれらのデータを準備する手順を述べる.

2.1 例 1 (たとえば, ファイル名を U-ShapedFrame.dat とする)

図 1 のような, 門型ラーメン (文献 1) の p.111) の例を取り上げて, 準備すべきデータについて説明する. 本例では長さの単位として mm を用いる. 門形ラーメンのすべての要素の縦弾性係数は $E = 206 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$, 断面積 $A = 400 \text{ mm}^2$, 断面二次モーメント $I = 1.3333 \times 10^4 \text{ mm}^4$ である. また, 水平部材の節点 3 に負荷した垂直荷重の大きさは, $P = 980 \text{ N}$ とする. より詳しく内容を知りたい場合には参考文献 1) を参照してほしい.

はじめに, 原点と 2 次元の座標を設定し, その座標に基づいて, ラーメン要素の端点 (一般に節点 (node) という) 位置を (x, y) 座標で求める. ここでは, 節点に対して 1 から始まる番号を設定し, 図 1 では 5 個の節点があるから 1 から 5 までの番号づけをする. 節点の位置を [mm] の単位で表すと, 節点データは, 節点番号およびその x, y 座標から構成され, 節点 1 を座標原点として

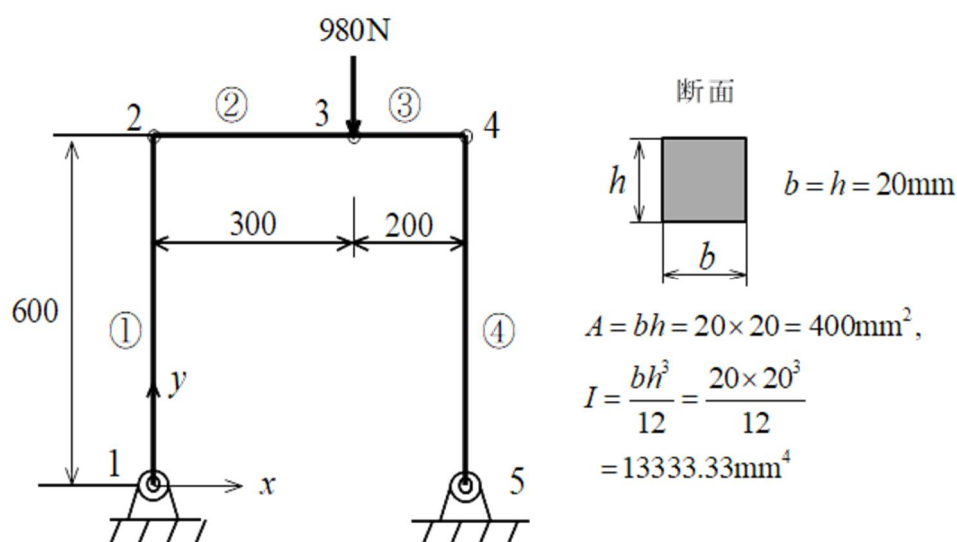


図 1 門形ラーメンの例題

```

1, 0.0, 0.0
2, 0.0, 600.0
3, 300.0, 600.0
4, 500.0, 600.0
5, 500.0, 0.0

```

と表される。このとき、データを区切るためにデータの間にコンマを入れる。また、節点番号は整数、 x, y 座標は実数（小数点つきの数値）で記述し、数字、コンマおよび空白などはすべて半角とする。

つぎに、**要素**（element）**データ**を作成する。図1では、節点番号と区別するために要素番号を○で囲んで表示している。本プログラムでは、節点だけに荷重が負荷できるようにしているので上辺の水平部材を2要素に分ける。これより、全要素数は4個となり、各要素に番号を1から4までつけ（番号のつけ方は任意）、その両端の節点番号をメモする。次に、各要素の縦弾性係数（ヤング率） E 、断面積 A （節点座標にミリメートル mm の単位を用いた場合は、断面積を mm^2 で表す）および断面2次モーメント $I \text{mm}^4$ を設定し、これらに対して要素番号（1からはじめる）を与える。たとえば、図1の要素番号1の要素は、両端点の節点番号は1と2である。さらに、 $E=206 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ 、 $A=400 \text{ mm}^2$ 、 $I=13333.33 \text{ mm}^4$ とし、すべての要素が同一材料であるものと考え、要素データは、要素番号を1として

```

1, 1, 2, 1
2, 2, 3, 1
3, 3, 4, 1
4, 4, 5, 1

```

となる。（異なる材料の要素がある場合には、材料番号を2, 3, ... とすればよい）

次に材料データを設定する。本問題では、要素すべてが同一材料、同一断面（ $E=206 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ 、 $A=400 \text{ mm}^2$ 、 $I=13333.33 \text{ mm}^4$ ）が与えられているものとする。材料データは、材料番号、縦弾性係数（ヤング率）、断面積、断面2次モーメントから構成され、本問題では

```

1, 206.0e3, 400.0, 13333.33

```

と表される。

次に、**拘束データ**を考える。本プログラムでは、**半剛接**（semi-rigid support）という特別な拘束条件も扱えるようになっているので、拘束の扱いについて、以下、詳しく述べる。

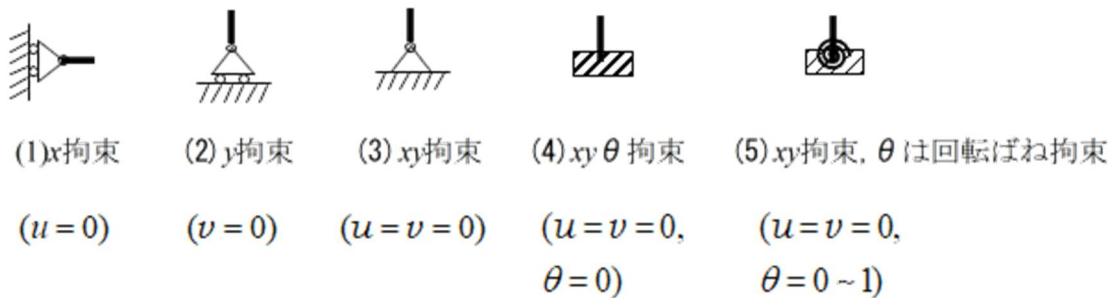


図2 拘束の種類と半剛接

図2に、平面ラーメンにおける拘束の種類を示す。(1)から(3)までは、 x, y 変位の拘束（回転支持端、滑接ともいう）を示し、(4)は、 x, y 変位のほかに角度（ θ ）の拘束も与える場合（完全固定、剛接）を示す。さらに、(5)は、 x, y 変位を拘束する一方で、ある大きさの角変位を許容するという拘束であり、一般に半剛接（文献1）,文献3）とよばれている。半剛接は、いわば、滑接と剛接との中間的な支持法と考えられ、支点の回転について回転ばね定数 k_θ のばねによって支えられているという考えに基づく。無次元パラメータ λ_θ （ $0 \leq \lambda_\theta \leq 1$ ）を導入し、 k_θ を回転剛性（Nm/rad）の基準量 $6EI/l$ および λ_θ を用いて

$$k_\theta = \frac{\lambda_\theta}{1 - \lambda_\theta} \frac{6EI}{l} \quad (1)$$

と表す。ここで、 EI は曲げ剛性、 l は要素の長さである。これは

$$\lambda_\theta = \frac{k_\theta}{k_\theta + \frac{6EI}{l}} \quad (2)$$

とも表される。これより $\lambda_\theta = 0$ は $k_\theta = 0$ 、すなわち滑接（ピン接合）に相当し、 $\lambda_\theta = 1$ は $k_\theta = \infty$ 、すなわち剛接に相当する（文献1）参照）。

一般に、有限要素法では節点に拘束を与えないと、剛体変位や剛体回転が生じて問題そのものが解析できない。本問題では、節点1, 5の x, y 方向変位を固定（ x, y 方向への移動を0.0に拘束する）する。ただし、節点1, 5の回転は自由である。

節点の x, y 方向別の拘束ありを1、拘束なしを0で表し、同時に、その拘束量を与える。なお、この拘束量は強制変位として考えることができる。また、回転の拘束の拘束量については、式(2)の λ_θ の値を用いる。

たとえば、節点1は、 x, y 方向に拘束が与えられ、その拘束量はそれぞれ0.0である。また、節点1の回転拘束については、回転拘束ありとし、 λ_θ に対してゼロを与える。（または、回転拘束なしとして、その拘束量を0.0としてもよい）。節点5に対しても同様な条件を与えると、拘束データは

1, 1, 0.0, 1, 0.0, 1, 0.0 （ただし、1, 1, 0.0, 1, 0.0, 0, 0.0も可）

5, 1, 0.0, 1, 0.0, 1, 0.0 （ただし、1, 1, 0.0, 1, 0.0, 0, 0.0も可）

と表す。ここで、拘束の有無を表す0, 1は整数、拘束量は実数とする。

最後は荷重データである。図1では、節点3の y 軸の負の方向に980 Nが作用するものとする。縦弾性係数 E を与えた際の力の単位はN（ニュートン）であったから、荷重もN単位で与える必要がある。この荷重データを、節点番号、 x 方向荷重、 y 方向荷重、曲げモーメントの順で与えるものとして

3, 0.0, -980.0, 0.0

と与える。ここで、荷重節点番号は整数、荷重値は実数とする。

以上では、総節点数が5、総要素数が4、材料数が1、拘束節点数が2、荷重節点数が1であり、これらを基本データと名付ける。

以上の説明に基づいて、図1の問題に関して、ユーザーが用意すべきデータは

```

5, 4, 1, 2, 1
1, 0.0, 0.0
2, 0.0, 600.0
3, 300.0, 600.0
4, 500.0, 600.0
5, 500.0, 0.0
1, 1, 2, 1
2, 2, 3, 1
3, 3, 4, 1
4, 4, 5, 1
1, 206.0e3, 400.0, 13333.33
1, 1, 0.0, 1, 0.0, 1, 0.0
5, 1, 0.0, 1, 0.0, 1, 0.0
3, 0.0, -980.0, 0.0
2DFrame Data (U-shaped Frame)

```

である。最後の行の 2Dframe Data (U-Shaped Frame) は、問題へのコメントであり、任意のメモを書き添えるようにしている。

2.2 例 2 (片持ちはり, ファイル名 CantileverBeam.dat)

次に、図 3 のように一端（節点 1）が固定された片持ちはりの例を考える。これは、総節点数 2、総

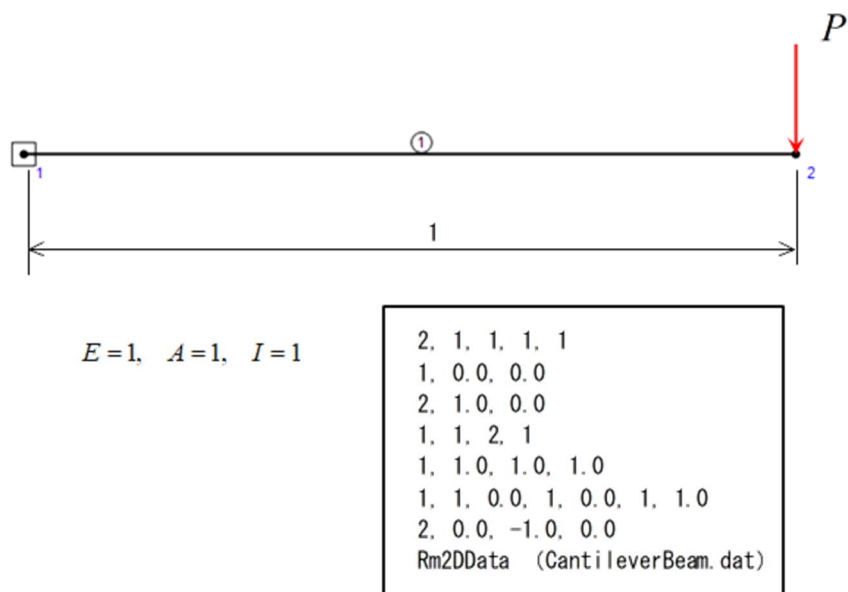


図 3 片持ちはりの例題

要素数 1, 材料数 1, 拘束節点数 1, 荷重節点数 1 の簡単な問題である. 長さ $l=1$, 断面積 $A=1$, 断面 2 次モーメント $I=1$ とする. なお, 単位は特に指定しないが長さの単位, 力の単位はそれぞれ一貫していなければならない. 先と同じようにデータを作成すると, 図中に示したデータのようなになる.

なお, 節点 1 を, 固定端すなわち剛接 (x, y 拘束, 角度 θ も拘束) としているが, もしも, 誤って x, y 拘束のみに設定した場合は, 解が得られない. これは, 節点 1 まわりの剛体回転が許容されてしまうためである.

2.3 例 3 (両端固定はり, ファイル名 BothEndClampedBeam.dat)

次に, 図 4 のように両端 (節点 1, 3) が固定されたはりの例を考える. 荷重ははり中央に作用するものとする. これは, 総節点数 3, 総要素数 2, 材料数 1, 拘束節点数 2, 荷重節点数 1 である. 長さ

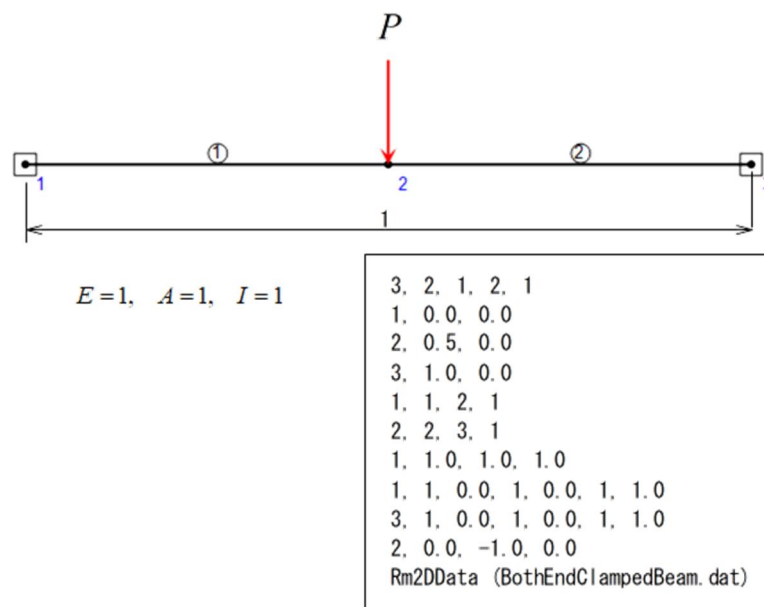


図 4 両端固定はりの例題

$l=1$, 断面積 $A=1$, 断面 2 次モーメント $I=1$ とする. この問題の FEM データは, 図中に示したようなになる.

2.4 例 4 (ひし形構造物, ファイル名 RhombicFrame.dat)

図 5 は, 直角に交わるひし形形状の構造物を左右に引張った例である. 図の節点 1, 3 を y 方向の変位拘束, 節点 2, 5 を x 方向の変位拘束として剛体変位を生じないようにする. 節点 1, 3 を荷重節点とし, 節点 1 には左方向に 98N, 節点 3 には, 右方向に 98N の力を作用させている. さらに, 断面形状

を $10 \times 10\text{mm}$ の正方形断面とし、各辺の長さ $l=353.55\text{mm}$ 、各部材の縦弾性係数は $E=206 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ としている。

この問題では、一見、拘束節点が存在しないように見えるが、変形の対称性に注目し、ある方向の変位が生じない節点に注目して拘束節点を設定するとよい。図5の右側に、この問題のために準備したデータを示す。

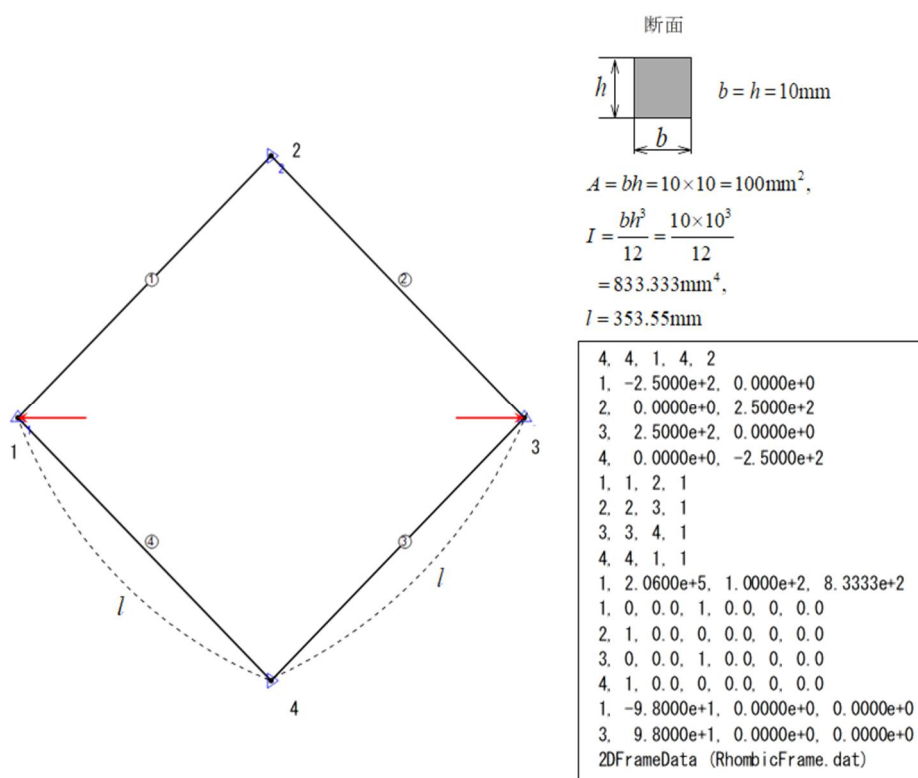


図5 ひし形構造の例題

2.5 例5 (2層ラーメン構造, ファイル名 TwoStageFrame.dat)

図6は、2層ラーメン構造の例である。総節点数7、総要素数7、材料数1、拘束節点数2、荷重節点数3であり、節点番号、要素番号は図に示した通りである。

節点1および7を完全固定とし、節点4には垂直下方に (y の負の向きに) $P=100\text{N}$ の荷重を、そして節点2, 3に水平右方に (x の正の向きに) $P=100\text{N}$ の荷重を負荷している。なお、本例では、長さの単位に mm を用いる。

材料は軟鋼を仮定して $E=206 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ 、断面は縦横 10mm の正方形断面とし、断面積 $A=100 \text{ mm}^2$ 、断面2次モーメント $I=833.333 \text{ mm}^4$ とする。左下端の節点1を座標原点とし、各節点位置は図示の通りである。

この問題に準備したデータは図 6 の下に示した通りである。

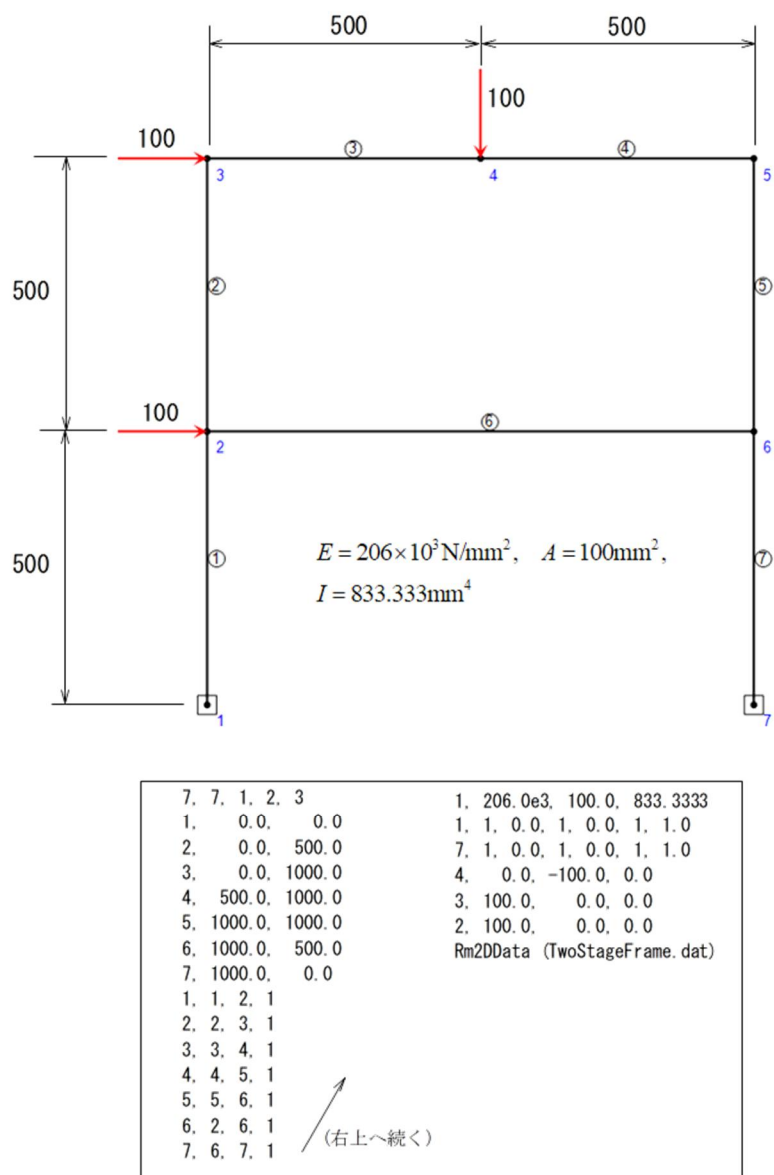


図 6 2 層ラーメン構造の例題

3. FEM の実行手順

2.1 節で準備した門形ラーメンのデータ (U-ShapedFrame.dat) をもとに、平面ラーメンの有限要素解析の手順を以下に述べる。

本プログラム rm2dg105.exe を起動すると図 7 のような起動画面が示される。ここで、ツールメニューの「ファイル」→「開く」をクリックすると、ファイル選択のダイアログボックスが表示されるので、2.1 節のデータ U-ShapedFrame.dat を選択する。

すると、図 8 のように、要素形状、拘束マークおよび荷重ベクトルが描画される。また、図 8 には、

節点番号，要素番号も描かれている．

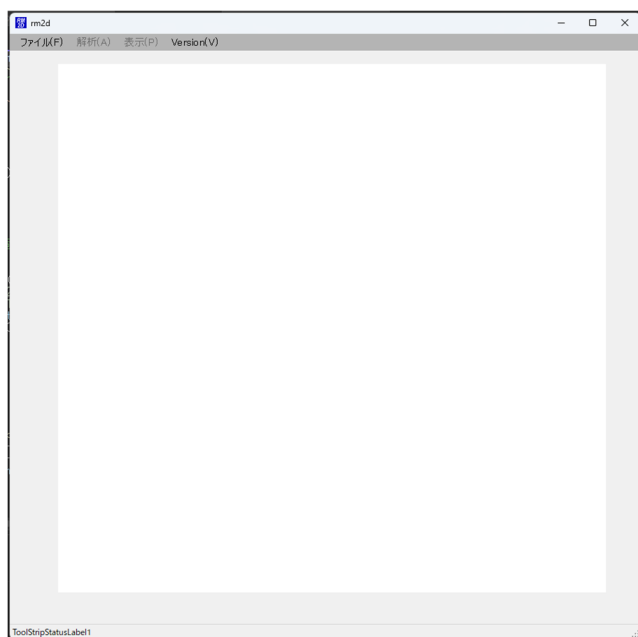


図 7 実行直後の画面

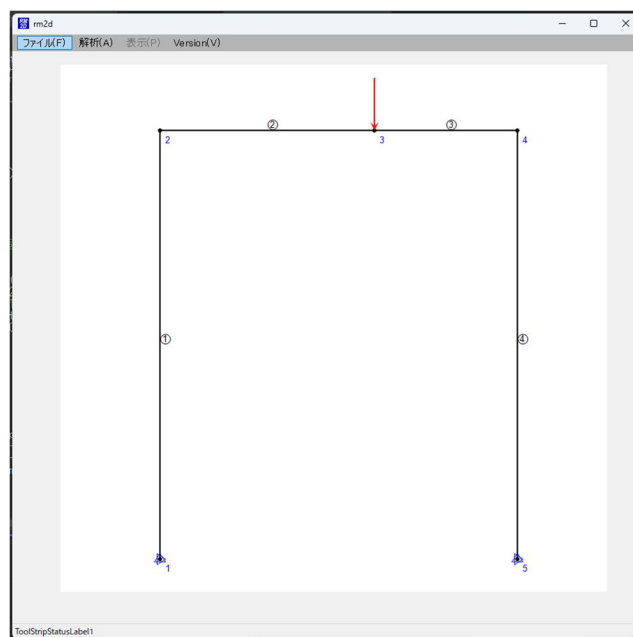


図 8 ファイル読み込み後の画面

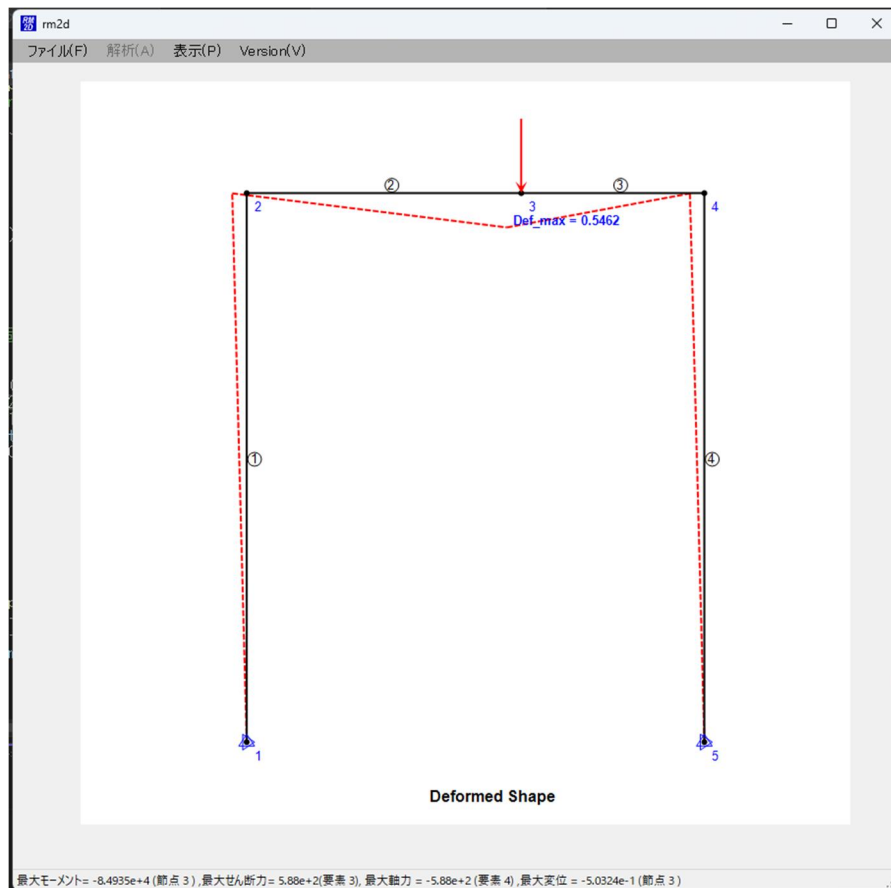


図 9 FEM 解析実行後の変形図

次に、

「解析」→「FEM 解析」

とメニューを選択すれば、有限要素解析が実行され、図 9 のような変形図が表示される。そこでは、変形後の様子が赤い破線で示され、最大合成変位 ($\sqrt{u_i^2 + v_i^2}$) の生じる節点近傍に「Def_max=0.5462」という数値（本例では単位は mm）が表示される。

変形をわかりやすく表示するために、変位の大きさは実際の変位を少々拡大して（最大変位の大きさが画面の大きさの 10%としている）表示している。さらに、マウスを節点近くに移動させると（**マウスホバー**という）、図 10 に示すようにその節点の変位の大きさが、 x, y, θ 成分ごとにポップアップ表示される。なお、各要素の変位は、FEM の定式化では座標変数の 3 次式で表される（文献 3)）。しかし、図 9 や図 10 では、変位後の各節点位置を直線で結ぶという簡略的な表示法をとっているのでやや不正確である。

また、本プログラムでは、

- 1) マウスホイールの回転で図形の拡大縮小、
- 2) マウスの左ボタンのドラッグで図形移動、

が行えるようになっている。図を拡大表示、あるいは移動すれば、変位や以下に示す曲げモーメント図などを詳細に把握することが可能である。

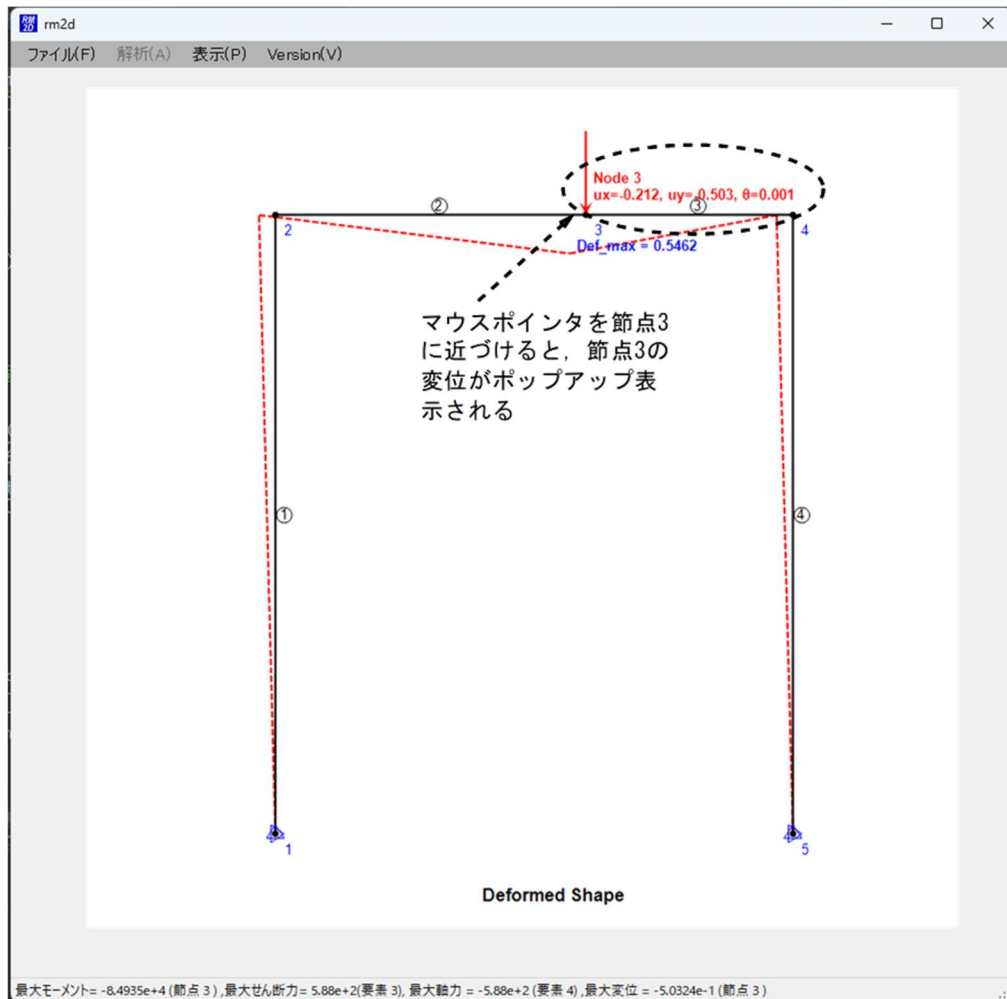


図 10 変位のポップアップ表示

次に、曲げモーメント、せん断力および軸力の表示について説明する。

本プログラムでは、要素内では曲げモーメントは直線状の変化をするものとして定式化している（荷重は、節点のみに作用するものと仮定しているため）。この曲げモーメントを表示するには、メニューの

「表示」→「Moment」

とすればよい。

図 11 は、その結果表示された曲げモーメント図を表したものである。また、図 11 では、要素番号 3 の中央付近にマウスポインタを近づけて、曲げモーメント値（同時に、せん断力および軸力値も）をポップアップ表示させている。節点 1, 5 は、回転自由支持点のために曲げモーメントはゼロである。

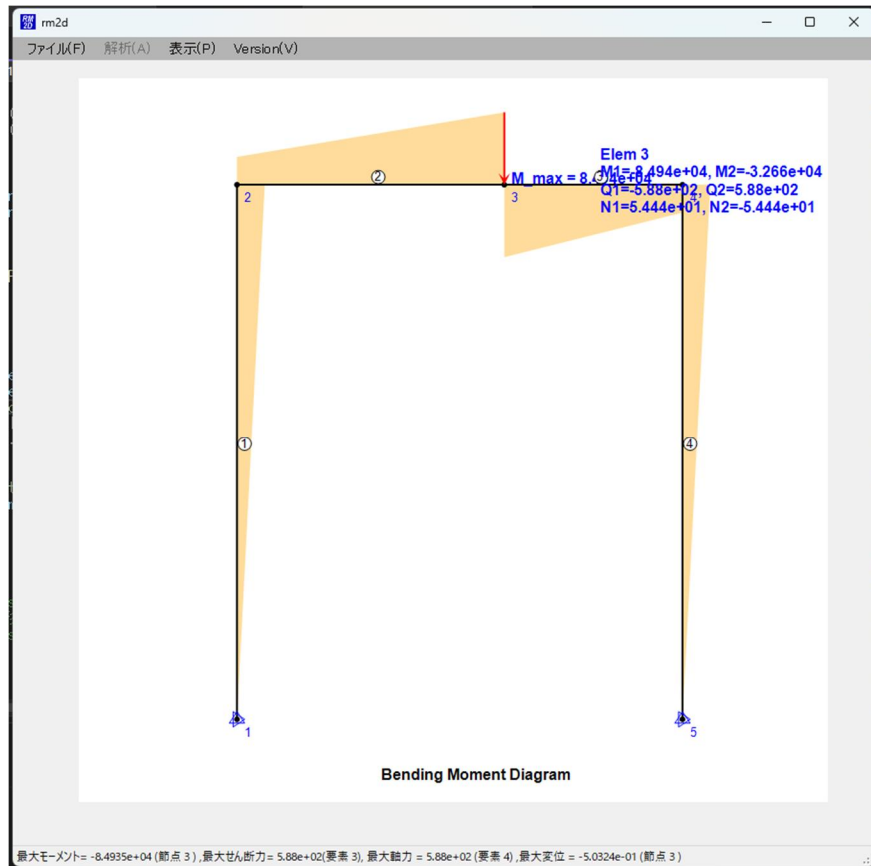


図 11 曲げモーメント図

荷重を負荷した節点 3 に最大曲げモーメント M_{\max} が生じていることがわかる．最大曲げ応力 σ_{\max} を求めたいときには， Z を断面係数とすれば

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} \quad (3)$$

により得られる．本例の場合には，断面が正方形なので断面係数は

$$Z = I / (h / 2) = 1.33333 \times 10^4 / (20 / 2) = 1.33333 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

と計算され（文献 4），これを式（3）に代入すると

$$\sigma_{\max} = \frac{84935}{1.33333 \times 10^3} \approx 63.70 \text{ N/mm}^2 = 63.70 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 63.70 \text{ MPa} \quad (4)$$

と得られる．

図 12 は，各節点の曲げモーメント値を回転方向とともに示した図であり，反時計回りを正として示している．これは，ラーメン構造の FEM 解析では，反時計回りを正として定式化しているためである．通常の構造力学の曲げモーメントの正負とは少し違っているので注意して欲しい．

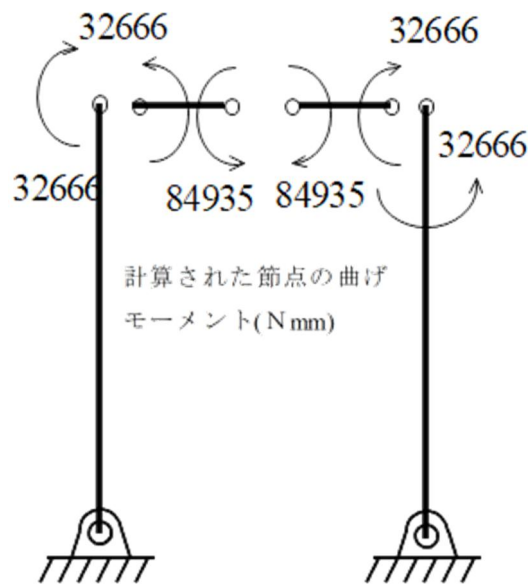
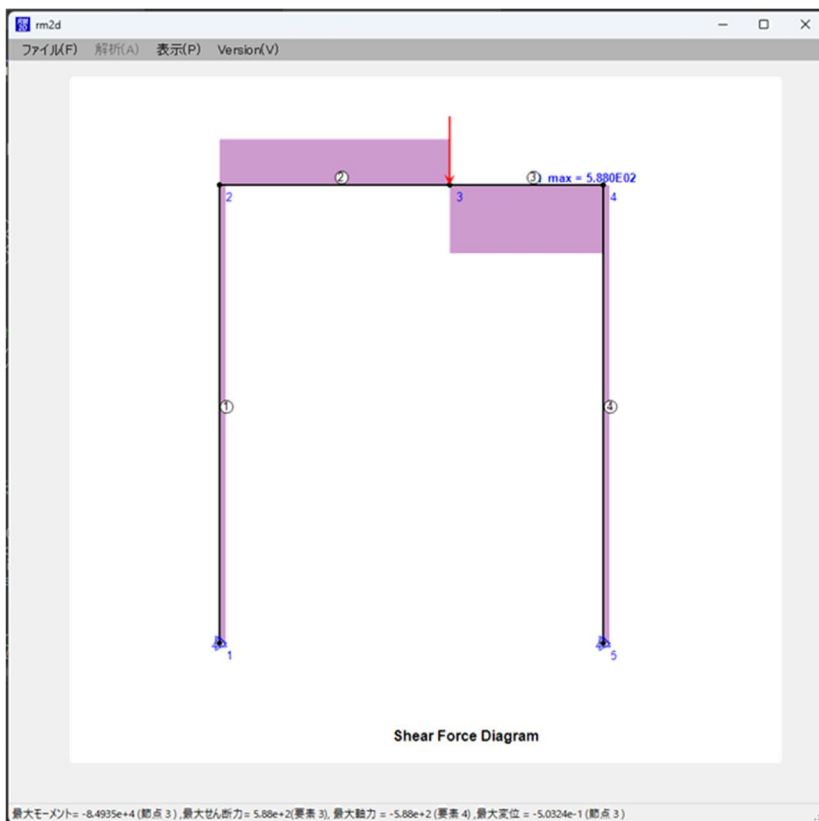


図 12 節点における曲げモーメントの値

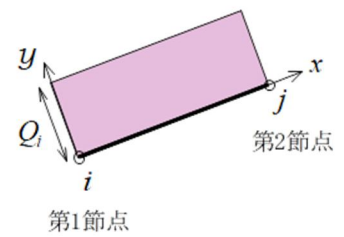
次に、ツールメニューの「表示」→「ShearForce」とすると、図 13(a)のようなせん断力図が表示される。

図 13(b)のように、要素部材軸方向を x 軸、これに直交し右手系をなす方向に y 軸をとったとき、第 1 節点の y 軸の正の向きにせん断力 Q_i を表示する。たとえば、図 13(a)の要素 2 では、節点 2（第 1 節点）から節点 3（第 2 節点）の向きに x 軸をとり、これに垂直（図 13 では上方向）に y 軸が定められる。要素 2 の節点 2（第 1 節点）にせん断力 $Q_2=392\text{N}$ (>0) の大きさを表示する。

要素 2 の第 2 節点（節点番号 3）のせん断力の大きさは下向きに 392N、要素 3 の第 1 節点（節点番号 3）のせん断力の大きさが下向き 588N であり、この和（980N）が、負荷荷重 $P=980\text{N}$ と同じ値となっていることがわかる（節点 3 において、負荷荷重 $P=980\text{N}$ が要素 2 と要素 3 にそれぞれ 392N と 588N に分配されていると考えてもよい）。

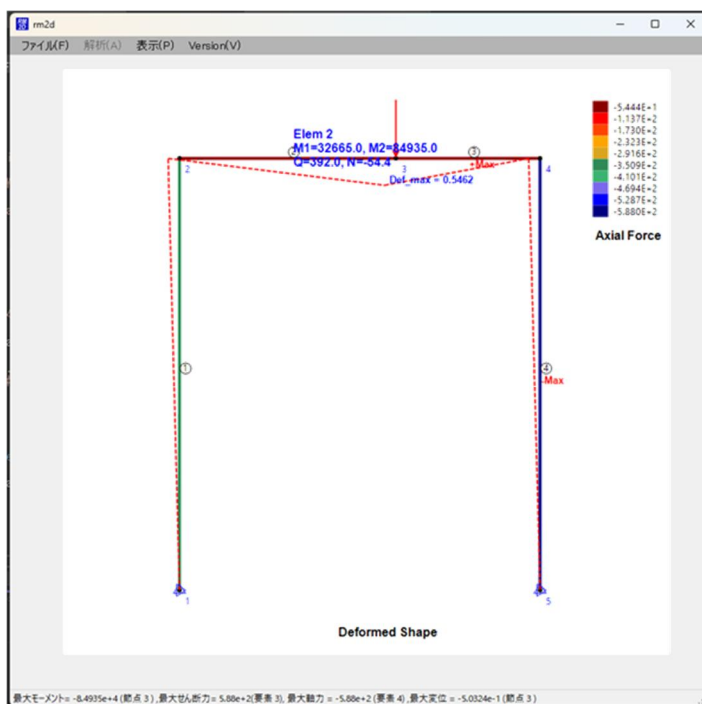


(a)

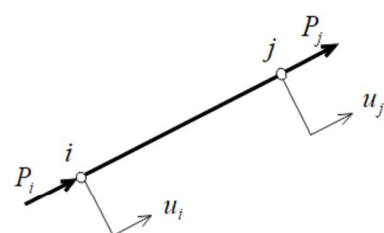


(b)

図 13 曲げモーメント図



(a)



(b)

図 14 軸力のカラー表示

図 14(a)は、ツールメニューで、「表示」→「軸力」として得られる、各要素の軸力を大きさに応じて色づけをした図である。各要素に生じる軸力の最小値から最大値までを 10 分割し、変形図も同時表示している。また、画面の右上には、凡例も表示している。また、軸力の正負は、図 14(b)に示すように部材軸方向に沿って定義する。

変位、曲げモーメントおよびせん断力と同様、要素の中心にマウスホバーすると、その要素の軸力値がポップアップ表示される。さらに、軸力値の最大要素と最小要素には、「Max」、「-Max」と表される。図 14(a)では、要素 2 にマウスポインタを近づけた場合を例示している。

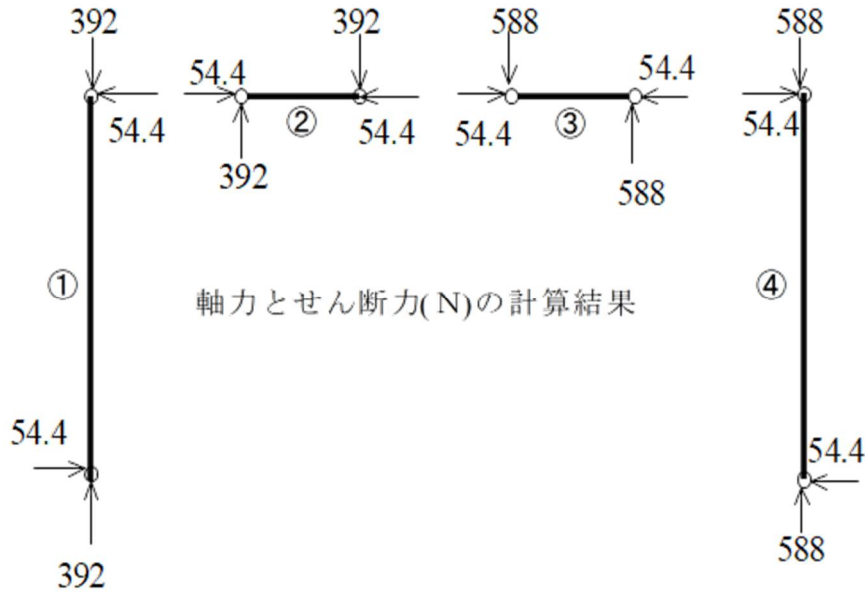


図 15 せん断力と軸力の計算結果

図 15 は、以上に得られたせん断力と軸力の値と方向を、部材ごとに示した図である。

4. FEM の結果と他の手法の結果との比較

本問題で扱っている門形ラーメンの寸法を図 16 のような記号で表す（門形ラーメンの高さとして h を用いているが、これは断面寸法の h とは異なることに注意してほしい）。このとき、Castigliano の定理を利用して荷重点のたわみ δ_P を求めると

$$\delta_P = \frac{(3a + 3b + 8h)a^2b^2}{12(a + b)(3a + 3b + 2h)EI} P \quad (5)$$

と得られる（詳細な導出過程は文献 1）を参照）。ここで、 $a=300\text{mm}$, $b=200\text{mm}$, $h=600\text{mm}$, $E=206 \times 10^3\text{N/mm}^2$, $I=13333.33\text{mm}^4$, $P=980\text{N}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \delta_P &= \frac{(3 \times 300 + 3 \times 200 + 8 \times 600) \times 300^2 \times 200^2}{12 \times (300 + 200) \times (3 \times 300 + 3 \times 200 + 2 \times 600) \times 206 \times 10^3 \times 13333.3} \times 980 \\ &= 0.4995\text{mm} \approx 0.5\text{mm} \end{aligned} \quad (6)$$

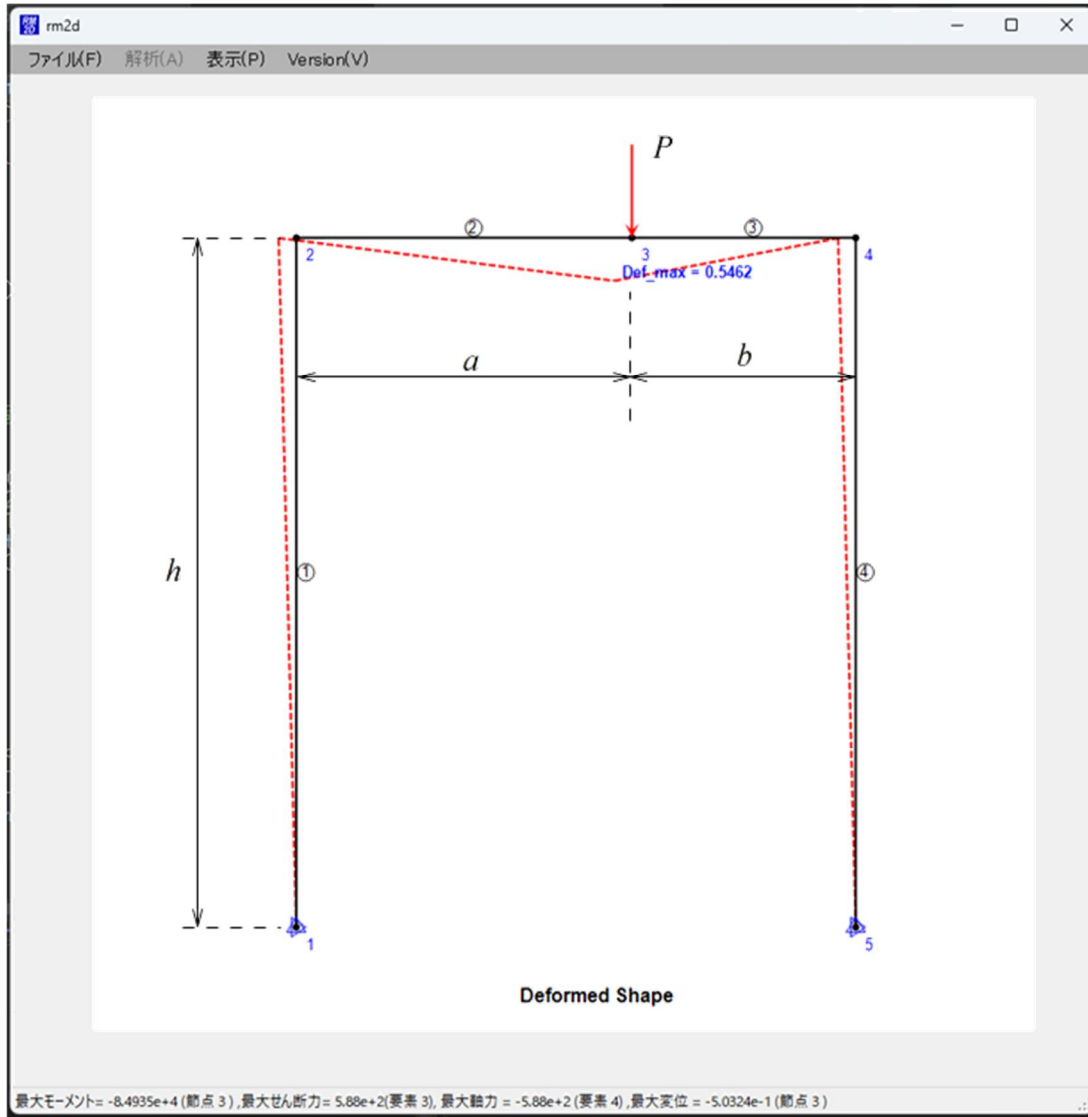


図 16 門形ラーメン構造の寸法

と求められる。これは、FEM により得られた荷重方向のたわみ 0.5032mm（図 16 の節点 3 の合成変位 0.5462mm は、 $u_x=0.2124\text{mm}$ 、 $v_y=-0.5032\text{mm}$ を合成した結果である）とは 0.7%の相対誤差しかなく、FEM は正しく計算されていることがわかる。なお、この誤差の主な原因は、式（4）の結果が曲げ変形のみを考慮し、はりの伸縮の変形を無視しているためである。なお、

節点 1 の水平反力 H_1 は、参考文献 1) より

$$H_1 = \frac{3ab}{2h(3a+3b+2h)EI} P \quad (7)$$

と得られる。ここで、与えられた値を代入して

$$H_1 = \frac{3 \times 300 \times 200}{2 \times 600 \times (3 \times 300 + 3 \times 200 + 2 \times 600)} \times 980 = 54.444 \text{ N} \quad (8)$$

と得られる。これは、FEM により得られた、節点 1 のせん断力の大きさ 54.4N と一致している。

5. 解析結果のテキスト出力

本プログラム rm2dg105.exe を実行すると、本プログラムの置かれたフォルダーに、解析結果が Rm2D-Results.txt というファイル名で書き込まれる。

本例の解析結果のファイルの内容は以下のようである。

```
*****
```

```
*                                     *
*      === 平面ラーメンの有限要素解析 ===      *
*                  Ver.1.05 (2025/09)                  *
*      ==  DATE & TIME 2025/09/06 16:04:12 ==      *
*      == Copyright(C) 2025-  T. H.          ==      *
*                                     *
```

```
*****
```

File name ==> C:\Users\user\Dropbox\vb2022\backup\rm2dg105\U-shapedFrame.dat

総節点数 = 5

総要素数 = 4

総材料数 = 1

拘束節点数 = 2

荷重節点数 = 1

節点	x 座標	y 座標
1	0.0000e+00	0.0000e+00
2	0.0000e+00	6.0000e+02
3	3.0000e+02	6.0000e+02
4	5.0000e+02	6.0000e+02
5	5.0000e+02	0.0000e+00

材料番号	ヤング率	断面積	断面二次モーメント
1	2.0600e+05	4.0000e+02	1.3333e+04

要素番号	Node1	Node2	材料番号
1	1	2	1
2	2	3	1
3	3	4	1
4	4	5	1

===== 拘 束 条 件 =====

節点番号	x 拘束	x 拘束量	y 拘束	y 拘束量	角度拘束	接合強さ
1	1	0.0	1	0.0	1	0.0
5	1	0.0	1	0.0	1	0.0

===== 荷 重 条 件 =====

節点番号	x 荷重	y 荷重	モーメント
3	0.0000e+00	-9.8000e+02	0.0000e+00

===== 変 位 =====

節点	x-変位	y-変位	角変位
1	0.0000e+00	0.0000e+00	1.5429e-03
2	-2.1220e-01	-2.8544e-03	-2.0249e-03
3	-2.1240e-01	-5.0324e-01	8.2970e-04
4	-2.1253e-01	-4.2816e-03	2.7327e-03
5	0.0000e+00	0.0000e+00	-8.3504e-04

===== 各 要 素 の 力, 曲げモーメント =====

要素番号	Node.1, 2	軸力	せん断力	曲げモーメント
1	1	3.9200e+02	-5.4442e+01	-1.9531e-03
	2	-3.9200e+02	5.4442e+01	-3.2665e+04
2	2	5.4445e+01	3.9200e+02	3.2665e+04
	3	-5.4445e+01	-3.9200e+02	8.4935e+04
3	3	5.4438e+01	-5.8800e+02	-8.4935e+04
	4	-5.4438e+01	5.8800e+02	-3.2665e+04
4	4	5.8800e+02	5.4442e+01	3.2665e+04
	5	-5.8800e+02	-5.4442e+01	1.9531e-03

出力内容の荷重条件までは、入力データ内容の出力であり、それ以降は、FEM 解析によって得られたすべての節点変位や要素応力の出力である。

出力結果のなかで、たとえば

===== 変 位 =====			
節点	x-変位	y-変位	角変位
1	0.0000e+00	0.0000e+00	1.5429e-03
.....			

と出力されている部分について解説する。これは、節点 1 の x, y 方向の変位 (mm) および角変位 (rad) の大きさを表している。

同様に、要素番号ごとの出力

要素番号	Node.1, 2	軸力	せん断力	曲げモーメント
1	1	3.9200e+02	-5.4442e+01	-1.9531e-03
	2	-3.9200e+02	5.4442e+01	-3.2665e+04
.....				

についても、軸力：N，せん断力：N，曲げモーメント：Nmm の単位となっていることに留意する。

すなわち、要素 1 の軸力は引張りで 392N，せん断力は水平右方向に 54.442N，曲げモーメントは、第 1 節点に時計回りに $1.9531 \times 10^{-3} \text{ Nm}$ （これは、数値誤差により完全なゼロにはなっていないが、実際はゼロである）、第 2 節点に時計回りに $3.2665 \times 10^4 \text{ Nm}$ が作用している。

ファイル Rm2D-Results.txt は、FEM 解析の実行のたびに同名で書き込まれる。したがって、このファイルを保存したい場合には、別名でコピーしておくといよい。

6. ほかの例題の結果

参考までに、以下に、2 節で示した例題の FEM 解析結果（変形図と曲げモーメント図）を図 17，図 18，図 19 および図 20 に示す。

【例 2】（片持ちはり，図 3 参照，CantileverBeam.dat）

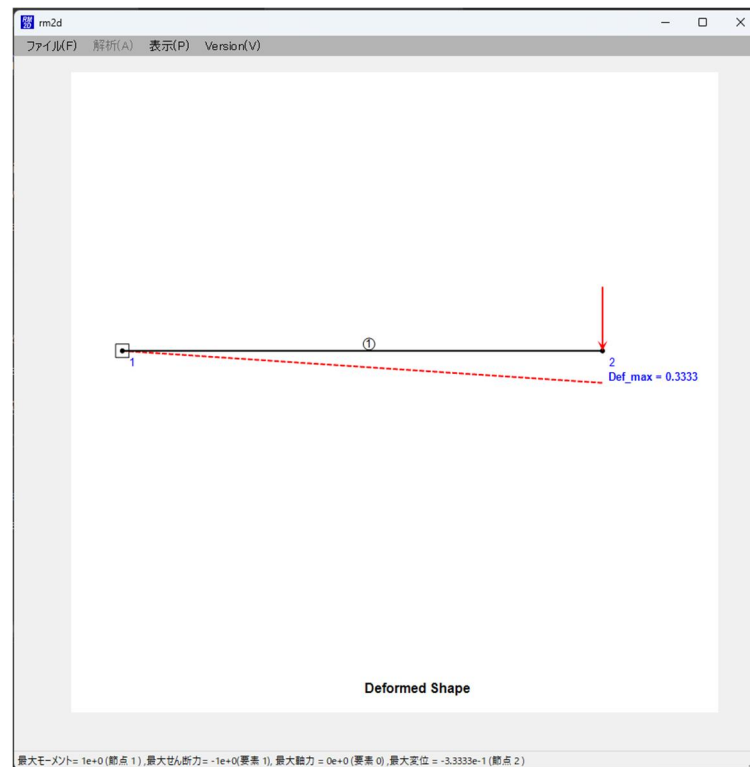
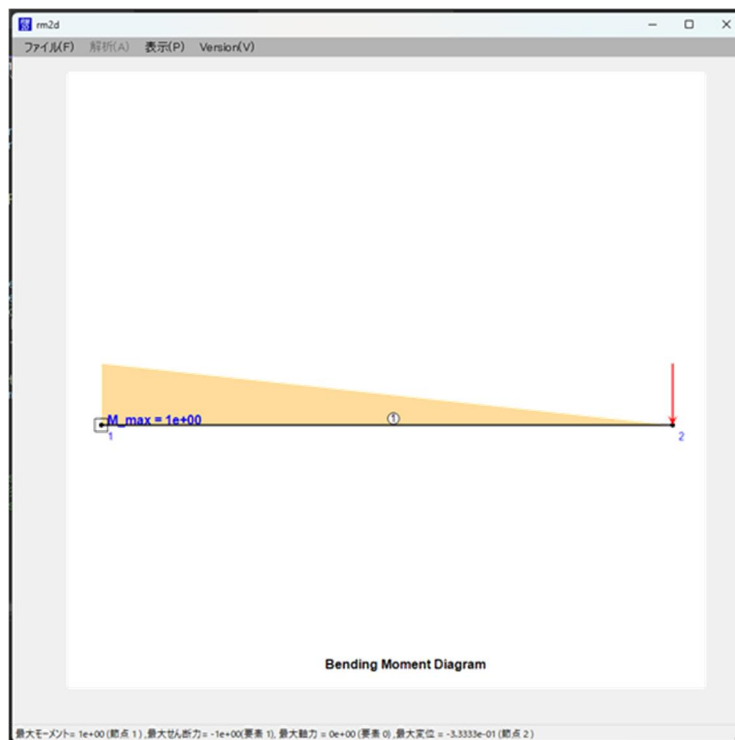


図 17 片持ちはりの変形図

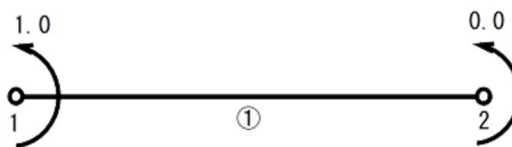
図 17 は，長さ $l=1$ ，先端の集中荷重 $P=1$ ，縦弾性係数 $E=1$ ，断面積 $A=1$ ，断面 2 次モーメント $I=1$ の，片持ちはりの変形図である．ここで与えた P などの値は現実的な値ではないが，計算結果の検算に役立つ．

片持ちはりの先端のたわみは，はり理論によれば $\delta = Pl^3/(3EI)=0.3333$ であり，FEM 解析でも同じ値を得ている．

図 18(a)は，本解析によって得られた曲げモーメント図である．要素 1 の第 1 節点（節点 1）では 1.0 の大きさの曲げモーメント，そして第 2 節点（節点 2）では 0.0 の曲げモーメントが生じている．これを図示したのが図 18(b)である．この図に基づき 3 節で説明したような手順にしたがって曲げモーメント図を描くと図 18(c)のようになる．一方で，通常の方法力学の曲げモーメントの符号規約にしたがって曲げモーメント図を描いたのが図 18(d)である．図 18(c)，18(d)の違いは曲げモーメントの符号の取り方の違いによる．



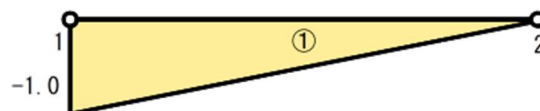
(a) FEMによる曲げモーメント図



(b) 曲げモーメントのFEM出力結果



(c) FEM出力結果に基づく曲げモーメント図



(d) 通常の材料力学の符号規約に基づく曲げモーメント図

図 18 片持ちはりの曲げモーメント図の違い

【例 3】（両端固定はり，図 4 参照）

図 19 は，中央に集中荷重を受ける両端固定はりの変形図である．この図も変位図としてはやや不正確であるが，荷重点のたわみは，0.005208 となっている．これは，はり理論から得られるたわみ $\delta = Pl^3/(192EI) = 1 \times 1^3/(192 \times 1 \times 1) = 5.2083 \times 10^{-3}$ と一致している．

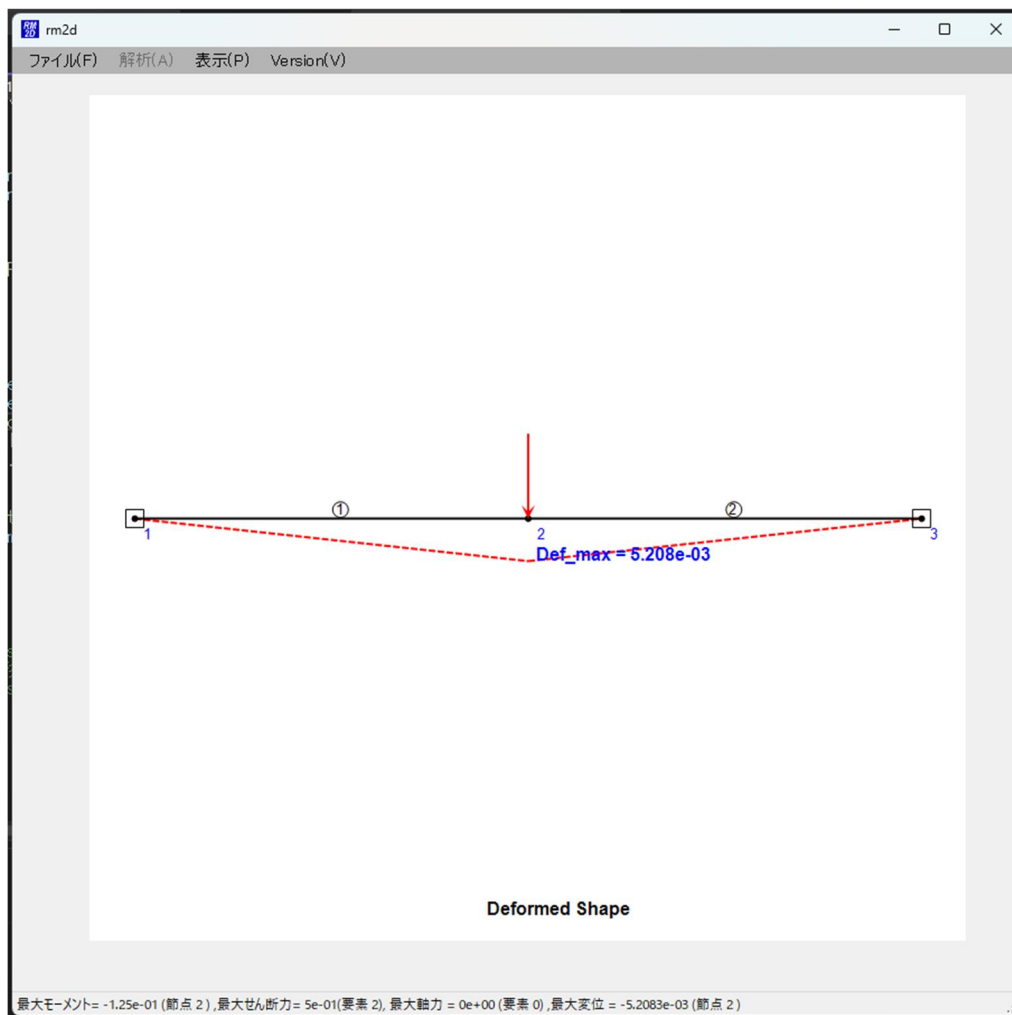
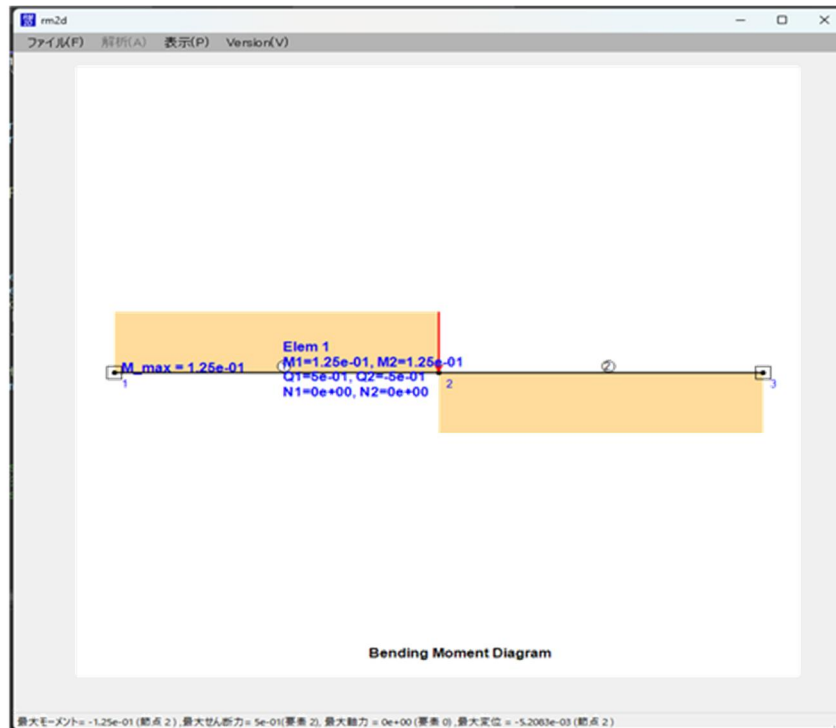


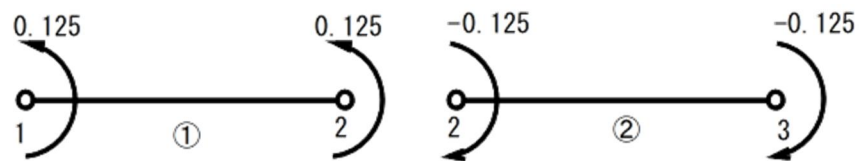
図 19 両端固定はりの変形図

図 20(a)は，本解析によって表示された曲げモーメント図である．要素 1 および要素 2 の曲げモーメントの大きさは図 20(b)のようになる．この図に基づいて曲げモーメント図を描くと図 20(c)のようになる．一方で，通常の方法力学の曲げモーメントの符号規約にしたがって曲げモーメント図を描いたのが図 20(d)である．図 18 と同様，図 20(c)，図 20(d)の違いは曲げモーメントの符号の取り方の違いによる．

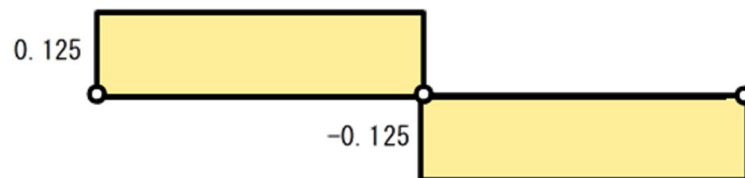
図 20(c)と図 20(d)の曲げモーメント図の形が大きく違っていて，まるで異なる曲げモーメント分布のように見えるが，実質的には同じである．両者の曲げモーメントの分布図の違いにこだわり過ぎると却って理解しがたくなるかも知れない．やや，乱暴な言い方になるが，両者の曲げモーメントの最大値に違いはないので，強度に注目する場合には，最大曲げモーメントの位置や大きさに注意して結果を受け止めればよい．



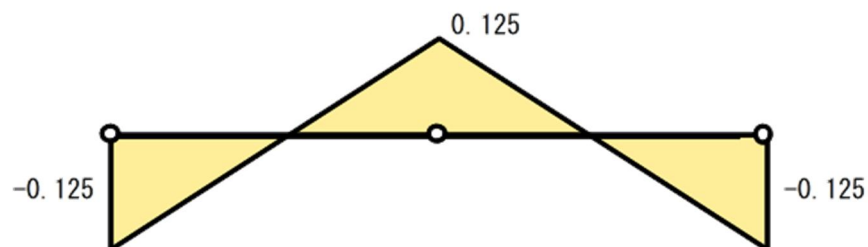
(a) FEMによる曲げモーメント図



(b) 曲げモーメントのFEM出力結果



(c) FEM出力結果に基づく曲げモーメント図



(d) 通常の材料力学の符号規約に基づく曲げモーメント図

図 20 両端固定はりの曲げモーメント図の違い

【例 4】（ひし形状構造物の引張り，図 4 参照）

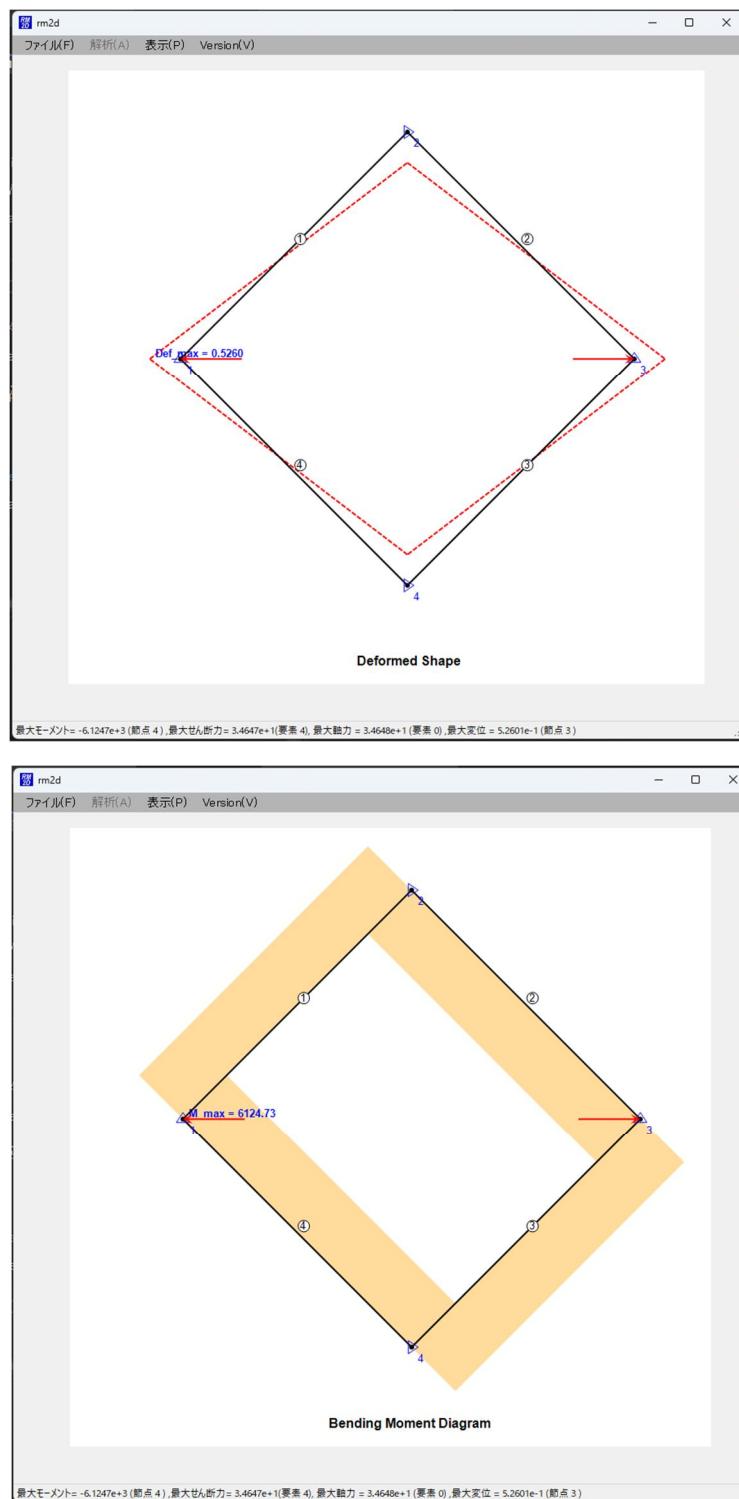


図 21 ひし形構造物の引張りの解析結果（変形図と曲げモーメント図）

図 21 は、ひし形状の構造が左右に引張りを受ける場合の変形図および曲げモーメント図である。文献 5) によれば、荷重点の拡がり量は

$$\delta = \frac{Pl^3}{24EI} \quad (9)$$

である。式 (9) に、 $P=98\text{N}$ 、 $l=353.55\text{mm}$ 、 $E=206 \times 103\text{N/mm}^2$ 、 $I=833.333\text{mm}^4$ を代入すると

$$\delta = \frac{98 \times 353.55^3}{24 \times 206 \times 10^3 \times 833.333} = 1.0512\text{mm} \quad (10)$$

を得る。したがって、式 (10) の半分の大きさすなわち 0.5256mm が荷重点の水平変位となる。FEM では、図 21 に示すように荷重点の水平変位は 0.5260mm と得られているから、両者はほぼ一致していることがわかる。

【例 5】(2 層ラーメン構造, 図 5 参照)

図 22 に、2.4 節に示した 2 層ラーメン構造の変形図と曲げモーメント図を示す。この問題の厳密解は求められていないので、理論解と FEM 結果との比較は行っていないが、節点番号 4 で最大変位、また、左下端の節点番号 1 に最大曲げモーメントが生じていることがわかる。

7. まとめ

本研究で開発した平面ラーメン（骨組）の FEM 解析プログラムの利用法を示し、実際に例題を通して正確な結果を得られることを確認した。ここでは、いくつかの簡単な構造に対しての適用例を示したが、もちろん、より複雑な構造に対しても適用可能である。

8. 利用上の注意、著作権ほか

本プログラムは、基本的には、FEM の教育用に開発したものであり、一般的な実務での利用は意図していない。このため、演習の目的以外の利用での結果については保証できない。

また、本プログラムの著作権は著者にあり、無断複製や第三者への無断配布などは控えていただきたい。本プログラムには、まだ、改善すべき点やバグが残されているように思う。その際は、作成者までに連絡をいただけるとありがたい。（連絡先：tadashihoribe@gmail.com）

9. 参考文献

- 1) 堀辺, Visual Basic でわかるやさしい有限要素法の基礎, 森北出版 (2008).
- 2) 戸川, 有限要素法概論, 培風館 (1981).
- 3) 藤谷, パソコンで解く骨組の力学, 丸善 (1995).
- 4) 堀辺, 例題で学ぶ材料力学, 森北出版 (2022).
- 5) 中原, 材料力学(上), 養賢堂 (1977), p.286.
- 6) 朝井, 3 ステップで学ぶ Visual Basic 入門, 技術評論社 (2017).

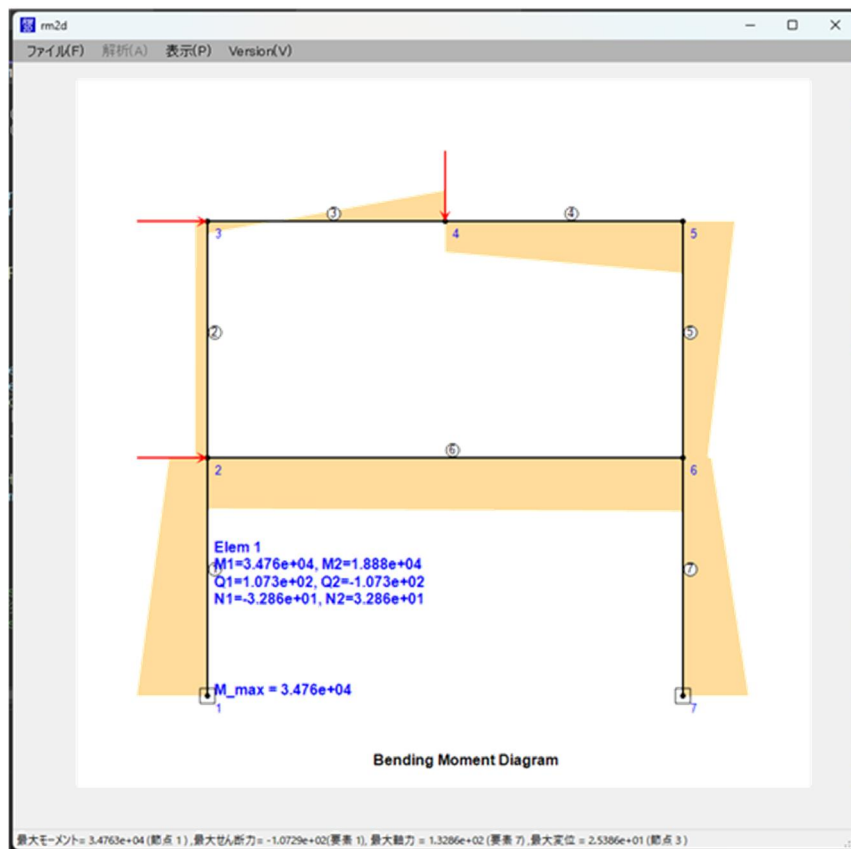
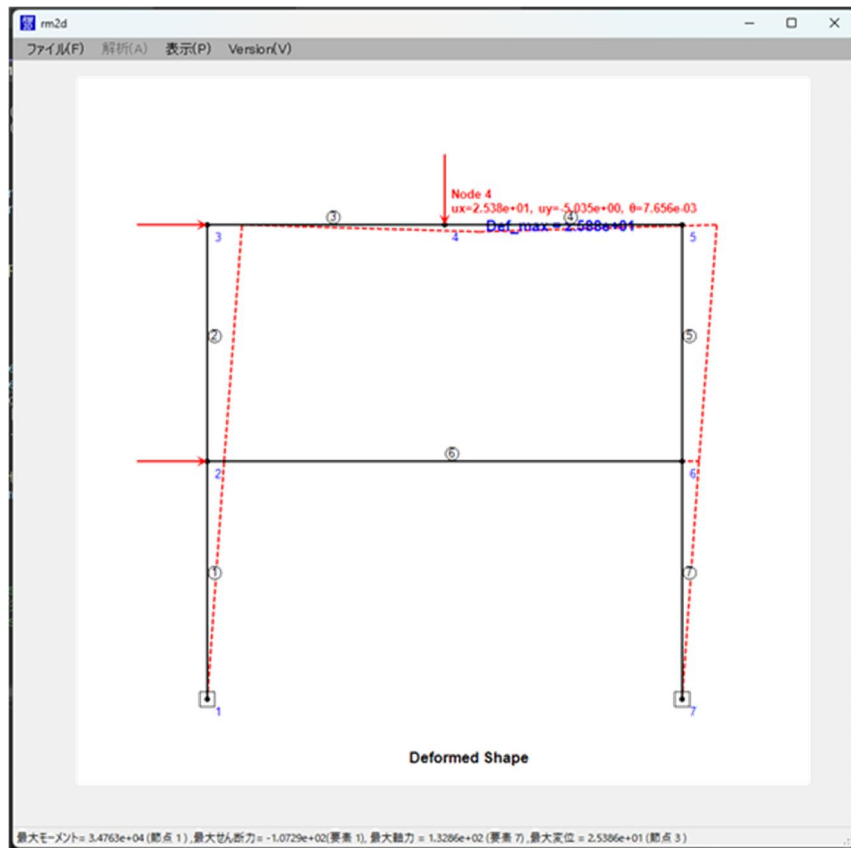


図 22 2 層ラーメンの解析結果（変形図と曲げモーメント図）