

## 4 節点アイソパラメトリック要素を用いた統合型 FEM について

2026.02.01

### 1. 本プログラムの概要

本プログラムは、実際のプログラムを通して有限要素法 (FEM) を学ぼうとする方々のために作成したものであり、対象とする領域を四角形要素<sup>(1),(2)</sup>でメッシュ分割し (実行ファイル名は grid4v41.exe), その後に 4 節点要素の有限要素解析 (実行ファイル名は isop41.exe) を行う統合型 FEM プログラムである。本プログラムのメッシュ生成においては、解析対象の形状をいくつかの小領域に分割し、その小領域を多数の四角形に分割して、FEM 解析に必要な四角形メッシュデータを自動生成する手法に基づいている (このように、いくつかの小領域からメッシュを生成する手順は、通常、**ブロック分割法**(block-based mesh generation method) と呼ばれている)。

さらに、メッシュ生成後に、画面上で変位拘束条件および荷重条件をマウスで設定でき、GUI により FEM プログラムに必要なデータを生成、ファイル出力できるようになっている。

続いて、そのファイル出力されたデータを四角形要素に基づく FEM プログラム isop41.exe に自動的に渡し、FEM 解析を行う。したがって、本プログラムを用いれば、一般の汎用 FEM ソフトと同様な操作手順を体験することができる。すなわち、本プログラムでは、メッシュ生成プログラム grid4v41.exe と 4 節点平面弾性 FEM プログラム isop41.exe とをシームレスに統合し、ユーザーはこの 2 つのプログラムを一体化して利用できるようになっている。

### 2. メッシュ生成プログラムの概要

メッシュ分割のプログラム (grid4v41.exe) の基本は、ブロック分割法を詳述した文献 (3) の手法を骨子としている。文献 (3) では三角形要素の生成に関して述べたものであるが、本プログラムは、そこで述べられているアルゴリズムを四角形生成用に変更し、同時に、VB2026 の GUI 機能を活かして作成している。

本プログラムが有するメッシュ分割機能は、

- (1) 生成可能な要素数、節点数を 30,000 節点まで。
- (2) 材料数を 30 個まで設定可能。
- (3) マウスの左クリック+ドラッグによって、図形の移動が行える。また、センターボタンの動きに応じて図形の拡大縮小が行える。これらの機能は、Google Maps と同様な操作法に準じていて、メッシュの細かい箇所での変位条件や荷重条件を容易に設定できる。
- (4) メニューに従って、節点の拘束条件 (x, y 方向変位拘束など) や荷重条件をマウスを用いて簡単に設定できる。
- (5) 本プログラムによってメッシュ生成したデータや拘束、荷重データをファイルに出力できる。さらに、この出力ファイルをただちに FEM 解析プログラム (isop41.exe) の入力ファイルとして利用可能

である。

などである。

さらに、**Reverse Cuthill-McKee (RCM)** 法を用いて、節点番号のリナンバリングを行い、生成されたメッシュのバンド幅を最小化している。これにより、剛性マトリックスのゼロ成分を削減し、有限要素解析の計算効率が向上する。

### 3. 4 節点アイソパラメトリック要素に基づく有限要素法の概要

FEM プログラム isop41.exe は、4 節点アイソパラメトリック要素<sup>(1),(2)</sup>（以下、4 節点要素と略称）を用いた有限要素法 (FEM) により平面弾性問題（平面応力または平面ひずみ<sup>(3)</sup>）を解析するものである。その特長は以下のようである。

(1) ソルバーとしてスカイライン法とコレスキー法<sup>(1),(4)</sup>を用い、開発言語として VB2026 を用いている。

(2) Gauss の積分点における応力を節点に外挿し、外挿した要素の数で平均化するという、通常の応力外挿法を用いて節点応力を計算している。

(3) ユーザーはメッシュ生成プログラム grid4v41.exe からのデータを読み込んで FEM を実行する。

(4) 本プログラムは、最大 30000 節点まで解析可能であり、数千節点の規模の問題であっても数秒で解を得ることができる。なお、材料数も 30 個を上限としており異種材料の接合問題も扱える。

(5) 解析結果は、テキストファイルで出力されるとともに、画面には解析対象の変位の様子や色づけされた応力が表示される。

(6) 画面に表示された変形図や応力図は、マウスの操作によって、Google Maps のように自由に移動、拡大縮小が可能である。これにより、細部での変位や応力の値をポップアップして読み取ることができる。

(7) 最大変位や最大・最小応力はただちに読み取れるように画面に表示される。

(8) マウスを節点の近くに移動すると、その節点の変位や応力の値が自動的にポップアップ表示される。

## 4. 用意すべきデータとメッシュ分割の実行例

### 4. 1 解析形状

以下、図 1(a)に示す円孔を有する帯板を例にとりメッシュ生成法の概要を説明する。帯板の寸法は横 120mm、縦 80mm、板厚は  $h=4\text{mm}$  であり、この帯板の中心に直径 40mm の穴が空いている。また、

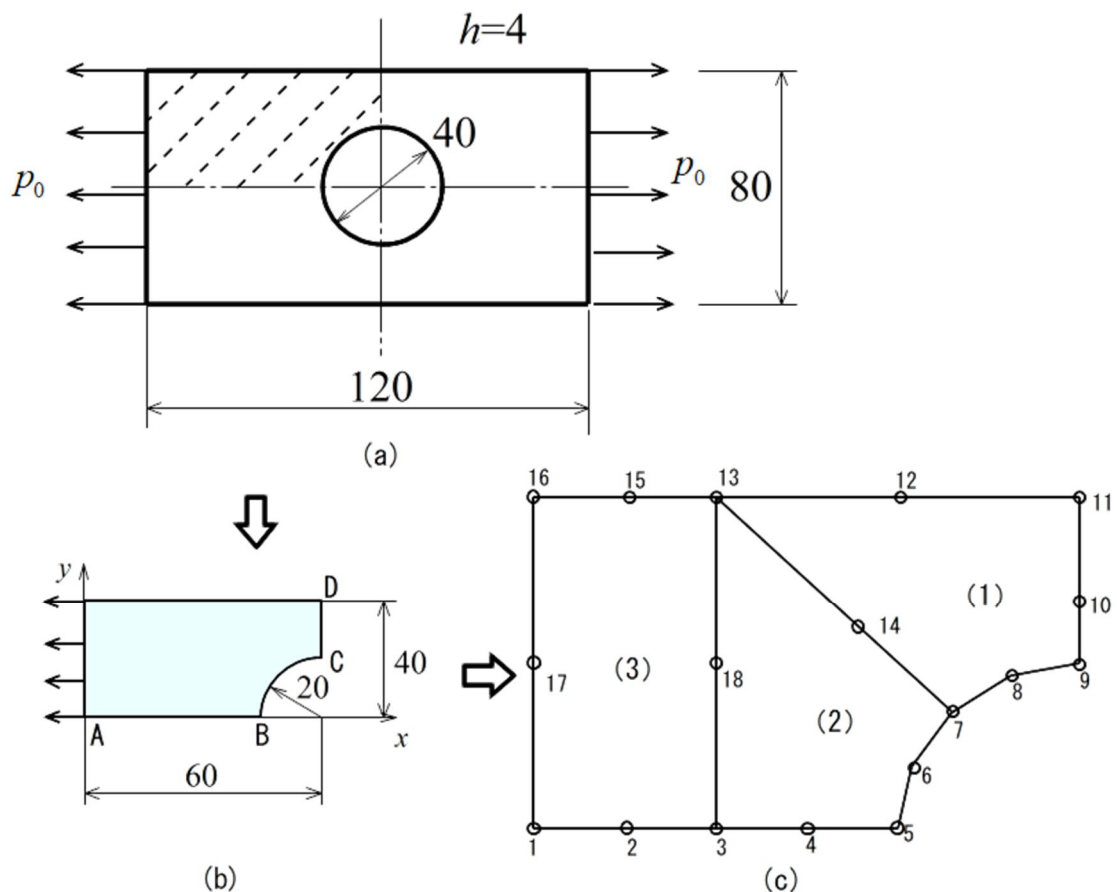


図 1 円孔を有する帯板の引張り

帯板の左右から 9800N の引張り力が作用するものとする。

本プログラムの入力データとなる**基本データ** (basic data) は、

- (1) あらかじめ解析対象をブロック分割し、それに基づいて必要な情報を数値化する。
- (2) 本プログラムの DataGrid (エクセルのようなデータ枠) を利用して (1) で準備したデータを入力する。
- (3) (2) の DataGrid を利用する代わりにエディタ (たとえば, Windows11 付属のノートパッドなど) で基本データを作成し, csv 形式でセーブしておいてもよい。ただし, データ作成ミスが少ない (2) の DataGrid の利用を推奨する。

により作成する。

なお, 図 1(a)の問題は, 形状や荷重の対称性を考慮して, 図 1(b)のように左上半分の 1 / 4 領域を考えればよい。

以下に, 準備すべきデータを説明する。(なお, 以降のデータは, enkou.csv というファイル名で添付されている)

## 4.2 領域の分割

まず，図 1(b)を，図 1(c)のように 3 個の四辺形に分割し，各々の四辺形の 4 つの頂点のほかに，各辺の中心付近（必ずしも中心である必要はないが）にも節点を設ける．これらの節点については，1 から番号付けをしてそれらの $(x,y)$ 座標をあらかじめ求めておく．番号の付け方は任意でよいが，規則性を与えると処理しやすい．ここでは，図 1(b)の点 A を原点にすると，18 個の各節点の番号と座標は

1, 0.0, 0.0	10, 60.0, 27.5
2, 10.0, 0.0	11, 60.0, 40.0
3, 20.0, 0.0	12, 40.0, 40.0
4, 30.0, 0.0	13, 20.0, 40.0
5, 40.0, 0.0	14, 37.0, 23.0
6, 41.52, 7.65	15, 10.0, 40.0
7, 45.85, 14.14	16, 0.0, 40.0
8, 52.35, 18.48	17, 0.0, 20.0
9, 60.0, 20.0	18, 20.0, 20.0

となる．

図 1 (c) に示した節点は，1 から始まる任意の番号を有していて，節点の総数は 18 個である．このとき，(1)，(2)，(3) と表示された四辺形から構成される各小領域は，隅部に 4 個，各辺の中間に 4 個の合計 8 個の節点を有している．なお，各小領域に示された座標 $(\xi, \eta)$ は，各領域での正規化された局所座標 (local coordinate) である．

## 4.3 各領域を碁盤の目のように分割

はじめに，領域 (1) を取り上げて説明する．

図 2 に示すように，領域 (1) は 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 と左回りの節点番号により囲まれている．また，はじめの 3 個の節点 13, 14, 7 を含む辺を辺番号 1 と数え，左回りに辺 2, 辺 3, 辺 4 と数える．

領域分割の際には，これらの辺がどの領域と接続しているのかも必要な情報である．たとえば，接続する領域がない場合は 0 として，領域 (1) の 4 つの辺の接続状況は

領域 (1) 辺 1→0, 辺 2→0, 辺 3→0, 辺 4→2

と表すことができる．ほかの領域についても

領域 (2) 辺 1→0, 辺 2→0, 辺 3→1, 辺 4→3

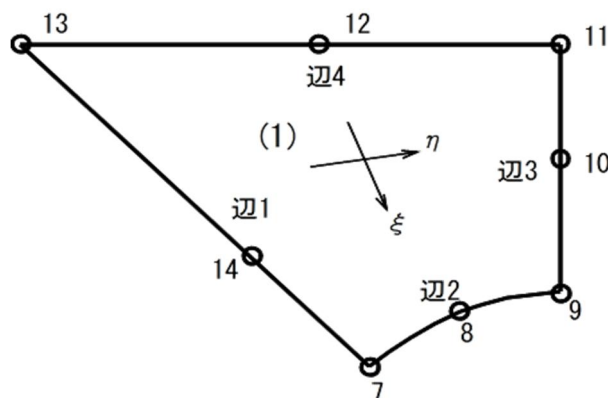


図 2 領域 (1) と辺番号

領域 (3) 辺 1→0, 辺 2→2, 辺 3→0, 辺 4→0

となることがわかる．メッシュ分割プログラム内部では、この連結データは、次の領域に移って要素分割した際に、節点番号が 2 重にふられることのないように利用されている．

次に、それぞれの領域 (1), (2), (3) を基盤の目のように細分割することを考える．図 3 は、領域 (1) を行方向に 7 本の分割線、列方向に 7 本の分割線で分割した例を示す．このとき、辺 1 と辺 3 に挟まれた方向を行(row)方向、辺 2 と辺 4 に挟まれた方向を列(column)方向とよぶことにする．

行分割線数と列分割線数によって要素分割の粗密を調整することができる．なお、図 3 の基盤の目となっている分割線は、変数  $x$  の 2 次曲線によって表されている．この細分割によって、領域 (1) は 49 個の節点と 36 個の四角形要素に分割されたことになる．また、これらの各節点や要素には規則的な番号付けがなされている．

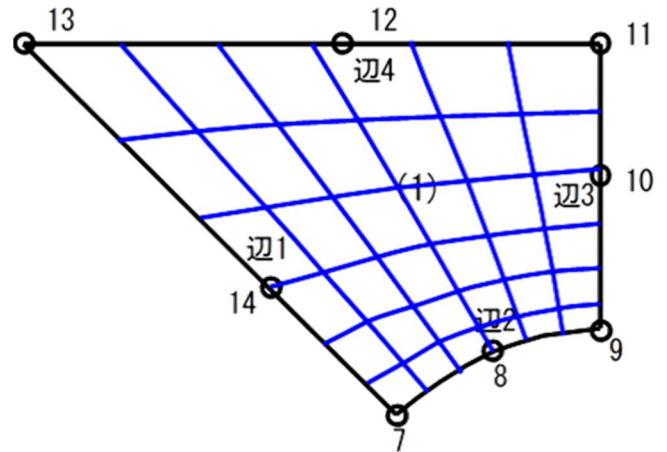


図 3 領域 (1) の細分割 (7×7)

次に、領域 (2) の細分割の様子を図 4(a),(b)に示す．

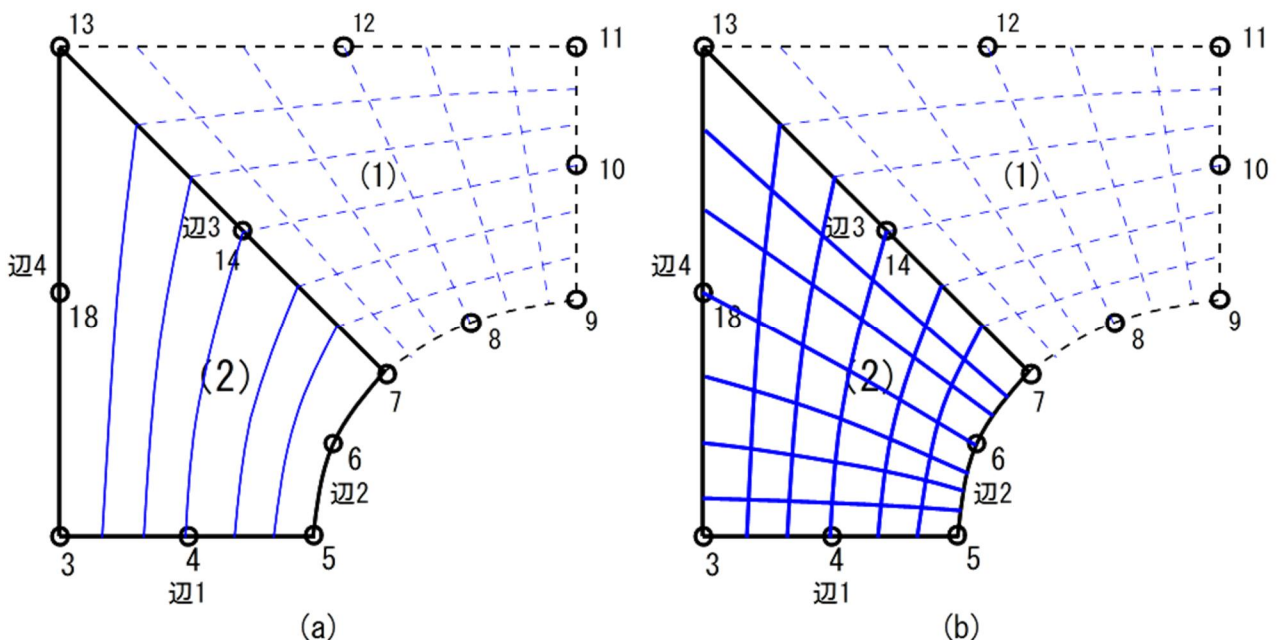


図 4 領域 (2) の細分割 (8×7)

図 4(a)は、節点 3, 4, 5 を含む辺を辺 1 と定め、領域 (2) の辺 2 と辺 4 とで挟まれた列方向を 7 分割

した様子を示す．この場合の分割線数 7 は，領域 (1) の行分割線数 7 と同数である必要がある（そうでないと基盤の目の数に食い違いが生じて要素分割が正しく行われぬ）．一方，図 4(b) は，節点 3, 4, 5 を含む辺 1 と節点 7, 14, 13 を含む辺 3 とで挟まれた行方向を 8 分割した様子を示す．この行方向の分割数には制約はないが，次に説明する領域 (3) の分割数の設定に影響を与える．以上により，領域 (2) は 56 個の節点（ただし 7 個の節点は領域 (1) と重複している）と 42 個の四角形要素に分割される．

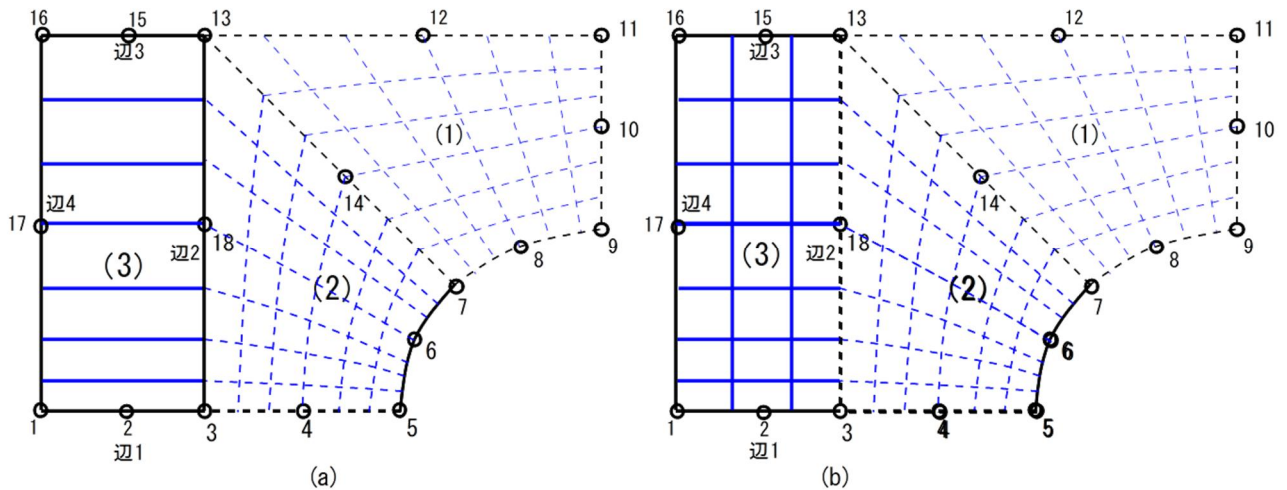


図 5 領域 (3) の細分割 (8×4)

図 5(a) は，節点 1, 2, 3 を辺 1 と定め，領域 (3) の行方向を 8 本の分割線で分割した様子を示す．この場合の分割線数 8 は，先の領域 (2) での説明と同様，領域 (2) の行分割線数 8 と同数である必要がある．一方，図 5(b) は，節点 3, 18, 13 の辺 2 と節点 16, 17, 1 の辺 4 との間の列方向を 4 分割した様子を示す．この列方向の分割数に対する制約はないが，なるべく正方形に近い四角形を生成するように決めるとよい．

以上の手順により，3 個の小領域を基盤の目のように四角形要素に分割し，その結果，領域全体を小さな四角形要素で覆うことになる．これが領域分割法の基本的な考え方である．したがって，正しい分割を得るには，接続する領域の整合性（隣り合う辺上では，行分割数あるいは列分割数を合致させること）に対する配慮が重要である．

領域ごとに任意の材料を与えることができ，ここでは，領域 (1), (2), (3) については軟鋼を仮定して，縦弾性係数  $E=206\text{GPa}(=206\times 10^3\text{N/mm}^2)$ ，ポアソン比  $\nu=0.3$  とし，これを，材料番号 1 と定義する．また，本問題を平面応力状態（薄い平板の面内変形）と考え，板厚は  $h=4\text{mm}$  である．

#### 4.4 各領域のデータ

以上により，ブロック分割法の考え方を示したが，それに必要な領域データを以下に示す．まず，各領域が隣の領域と接しているかを示す，連結データとして

領域 (1)・・・2, 0, 0, 0 (辺番号 4 が領域 (2) と接している．それ以外の辺は接していない)

領域 (2)・・・0, 0, 1, 3 (辺番号 1, 2 はどの領域とも接してなく，辺番号 3 が領域 (1) と，  
辺番号 4 が領域 (3) と接している)

領域 (3)・・・0, 2, 0, 0 (辺番号 2 が領域 (2) と接している．それ以外の辺は接していない)  
が必要である．

次に，領域番号，各領域の材料番号 (1 から始まる)，各領域の行分割線数，列分割線数および領域を  
反時計回りに囲む 8 個の節点番号 (ただし，辺番号 1 から節点番号を数え上げる) から成る領域データ  
が必要である．これを，本例題の各領域について改めて書き下ろすと

領域 (1)・・・1, 1, 7, 7, 13, 14, 7, 8, 9, 10, 11, 12

領域 (2)・・・2, 1, 8, 7, 3, 4, 5, 6, 7, 14, 13, 18

領域 (3)・・・3, 1, 8, 4, 1, 2, 3, 18, 13, 15, 16, 17

となる．

さらに，材料番号に応じて，縦弾性係数，ポアソン比，板厚 (平面ひずみの場合には 0.0 とする) を与  
える必要がある．本問題では，材料数が 1 個なので，材料番号を 1 として

1, 206e3, 0.3, 4.0

となる．

なお，単位については，各単位が互いに整合するように与える必要がある．一般的には，縦弾性係数  $E$   
に対しては，GPa ( $10^9$  N/m<sup>2</sup>) の単位が用いられるが，本例のように，長さの単位に [mm] などを用いて  
いる場合には，それに応じて  $E$  を与える必要がある．たとえば，通常の軟鋼では， $E=206\text{GPa}=206\times 10^9$   
N/m<sup>2</sup> であるから，これを単位変換して  $E=206\text{GPa}=206\times 10^9$  N / ((1000mm)<sup>2</sup>) =  $206\times 10^3$  N/mm<sup>2</sup> と  
して入力する必要がある．また，このデータに応じて FEM 解析によって計算された応力は，N/mm<sup>2</sup> の  
単位を有することにも注意が必要である．

#### 4.5 要素分割のためのデータ

以上のアルゴリズムに沿って領域を要素分割する場合に，ユーザーが用意すべきデータを以下に示す．

##### 【用意すべきデータ】

##### (1) 基本データ (1 行)

領域の総数，境界点の総数，材料数 (最大 30 個まで)

##### (2) 境界点データ (境界点の数だけ用意する)

境界点の番号， $x$  座標， $y$  座標

##### (3) 連結データ (領域の数だけ用意する)

領域番号，連結データ (4 個)

##### (4) 領域データ (領域の数だけ用意する)

領域番号，材料番号 (1 から)，領域の節点群の行分割線数，領域の節点群の列分割線数，  
四角形を定義する全体節点番号 (8 個) (辺 1 より始めて反時計回り)

(5) 材料データ (材料の数だけ用意する)

材料番号 (1 から), 縦弾性係数, ポアソン比, 板厚 (平面ひずみの場合には 0.0 とする)

本問題では, (1) から (5) までについては

(1)

3, 18, 1

(2)

1, 0.0, 0.0	10, 60.0, 27.5
2, 10.0, 0.0	11, 60.0, 40.0
3, 20.0, 0.0	12, 40.0, 40.0
4, 30.0, 0.0	13, 20.0, 40.0
5, 40.0, 0.0	14, 37.0, 23.0
6, 41.52, 7.65	15, 10.0, 40.0
7, 45.85, 14.14	16, 0.0, 40.0
8, 52.35, 18.48	17, 0.0, 20.0
9, 60.0, 20.0	18, 20.0, 20.0

(3)

1, 2, 0, 0, 0  
2, 0, 0, 1, 3  
3, 0, 2, 0, 0

(4)

1, 1, 7, 7, 13, 14, 7, 8, 9, 10, 11, 12  
2, 1, 8, 7, 3, 4, 5, 6, 7, 14, 13, 18  
3, 1, 8, 4, 1, 2, 3, 18, 13, 15, 16, 17

(5)

1, 206e3, 0.3, 4.0

となる. (以上の内容を enkou.csv として添付している)

## 5. DataGrid による入力とメッシュ生成

以上の説明により, データを入力する準備ができた. そこで, 以下に, 本プログラム grid4v41.exe を起動し, 以上のデータを DataGrid に入力する手順とメッシュ生成手順を示す.

### 5.1 起動画面と各メニュー

図 6 は本プログラム grid4v41.exe をダブルクリックして起動した直後の画面であり, メニューバー,



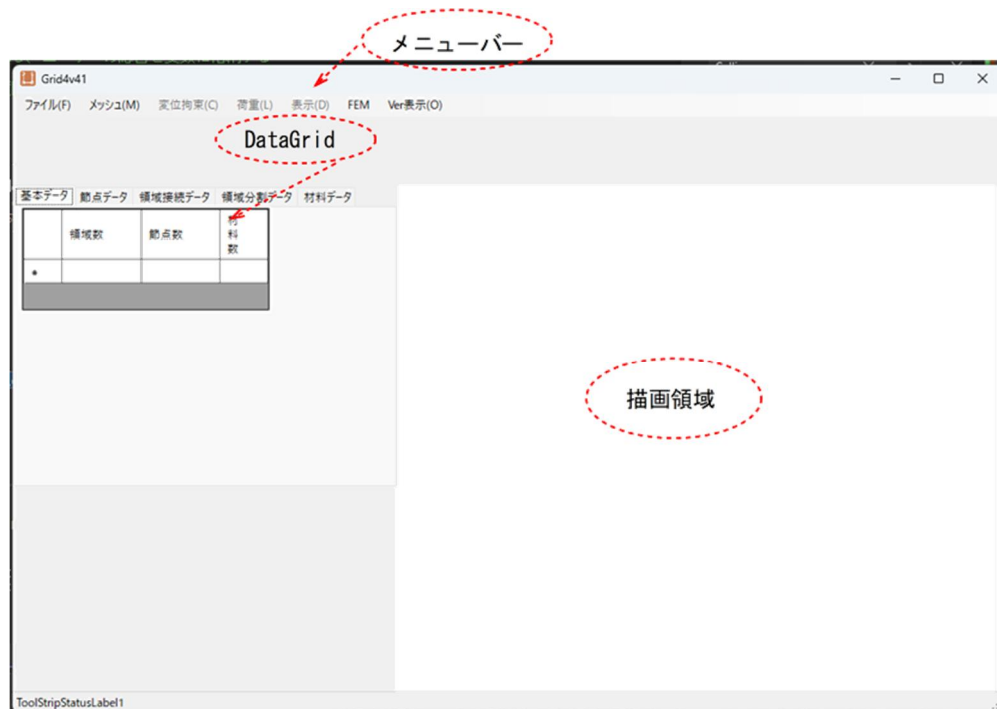


図 6 本プログラムの起動画面

タブ状の DataGrid および描画領域から構成される。

エクセルのセルに似た DataGrid には、メッシュ生成のための各種データを入力し、描画領域には、対象とする図形やメッシュされた様子が描画される。さらに、プルダウンメニューには

- \* メッシュ生成 => メッシュ分割, メッシュ分割 (節点, 要素番号表示)
- \* 変位拘束 =>  $x$  方向変位拘束,  $y$  方向変位拘束,  $xy$  方向変位同時拘束, 変位拘束全解除
- \* 荷重 =>  $x$  方向荷重,  $y$  方向荷重,  $xy$  方向荷重, 荷重全解除
- \* 表示 => 節点番号・要素番号, 境界条件
- \* FEM => 実行

などがあり、これらの使い方は、必要に応じて後に紹介する。

## 5.2 簡単な例題（長方形領域）

前章では、円孔を有する帯板のデータ例を示したが、ここでは、はじめに、より簡単な例として長方形領域のメッシュ分割から始める。

図 7(a)のように厚さを 1mm とし、横 100mm、縦 50mm の長方形領域を、図 7(b)のような縦 11 本、横 6 本の格子線から成るメッシュに分割することを考える。

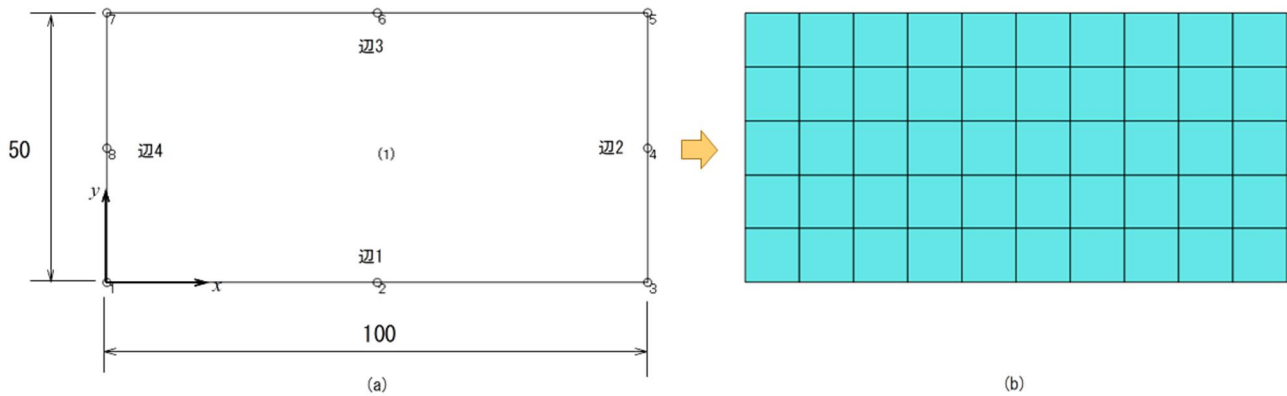


図 7 長方形のメッシュ分割

この場合の材料数を 1 個とすると、領域数は 1、節点数は 8、材料数は 1 だから、基本データは  
1, 8, 1

である。

長方形領域の左下隅を原点にとり、8 個の節点を図 8(a) のように定めると、それぞれの節点の節点番号と  $(x, y)$  座標は

1, 0.0, 0.0	5, 100.0, 50.0
2, 50.0, 0.0	6, 50.0, 50.0
3, 100.0, 0.0	7, 0.0, 50.0
4, 100.0, 25.0	8, 0.0, 25.0

となる。

領域番号 1 に隣接する領域は存在しないから、辺 1 から辺 4 までの領域連結データは

1, 0, 0, 0, 0

となる。

領域データについては、領域番号が 1、材料番号が 1、列分割数が 11、行分割数 6 なので、これに、辺 1 から反時計回りに数えて 8 個の節点番号を加えると

1, 1, 11, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

となる。(先に定義したとおり、辺 1-3 方向を**行方向**、辺 2-4 方向を**列方向**としている。)

材料データは、軟鋼の薄板 (厚さ 1mm) を仮定して、 $E=206 \times 10^3 \text{N/mm}^2$ 、 $\nu=0.3$ 、 $h=1\text{mm}$  として

1, 206e3, 0.3, 1.0

とする。

以上のデータを、それぞれの DataGrid タブに入力すると、以下の図 8 のようになる。

基本データ 節点データ 領域接続データ 領域分割データ 材料データ

	領域数	節点数	材料数
▶	1	8	1
*			

(a)

基本データ 節点データ 領域接続データ 領域分割データ 材料データ

	節点番号	X座標	Y座標
	1	0	0
	2	50	0
	3	100	0
	4	100	25
	5	100	50
	6	50	50
	7	0	50
▶	8	0	25
*			

(b)

基本データ 節点データ 領域接続データ 領域分割データ 材料データ

	領域番号	辺1	辺2	辺3	辺4
▶	1	0	0	0	0
*					

(c)

基本データ 節点データ 領域接続データ 領域分割データ 材料データ

	領域番号	材料番号	行数	列数	Ndn1	Ndn2
▶	1	1	6	11	1	2
*						

(注 : Ndn3以降は、右にスクロールして3, 4, . . . , 8を入力)

(d)

基本データ 節点データ 領域接続データ 領域分割データ 材料データ

	材料番号	縦弾性係数	ポアソン比	厚さ
▶	1	206e3	0.3	1
*				

(e)

図 8 長方形領域の分割のためのデータ

入力データをファイルに保存するために、以上で作成したデータをプルダウンメニュー「ファイル」→「出力」により、csv形式でファイルに保存できる。ここでは、beam6-11.csv という名をつけて保存しておく。そのファイルの実際の内容は

Two Dimensional Elastic Problem	6, 50, 50
1, 8, 1	7, 0, 50
1, 0, 0	8, 0, 25
2, 50, 0	1, 0, 0, 0, 0
3, 100, 0	1, 1, 6, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
4, 100, 25	1, 206e3, 0.3, 1
5, 100, 50	

である。ここで、1行目の「Two Dimensional Elastic Problem」はデータファイルのコメントとしてつけ加えたものである。また、このファイルは、メニューバーの「ファイル」→「開く」で読み込むことが

でき、その内容を DataGrid に取り込むことができる。

以上でデータ入力を終えたあとに、メニューバーの「メッシュ」→メッシュ分割を選択すると図 9 のような領域の図形の確認画面が現れる。ここで、「はい (Y)」を選択すると図 10 のようなメッシュされ

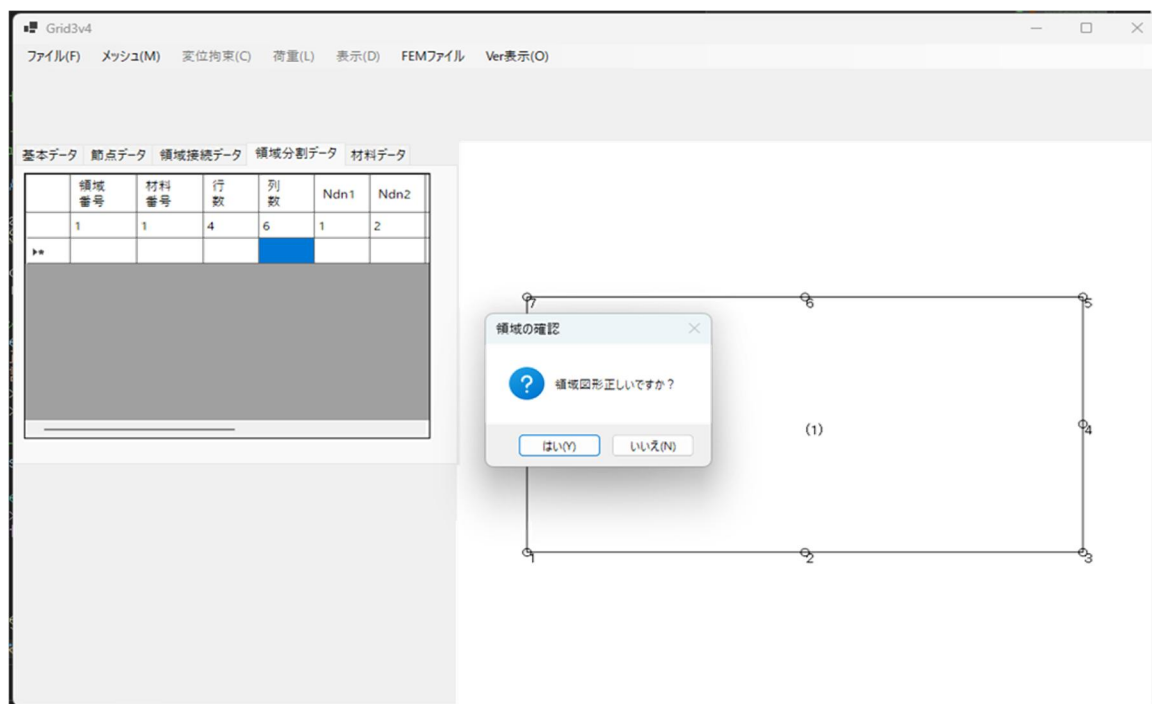


図 9 領域図形の確認

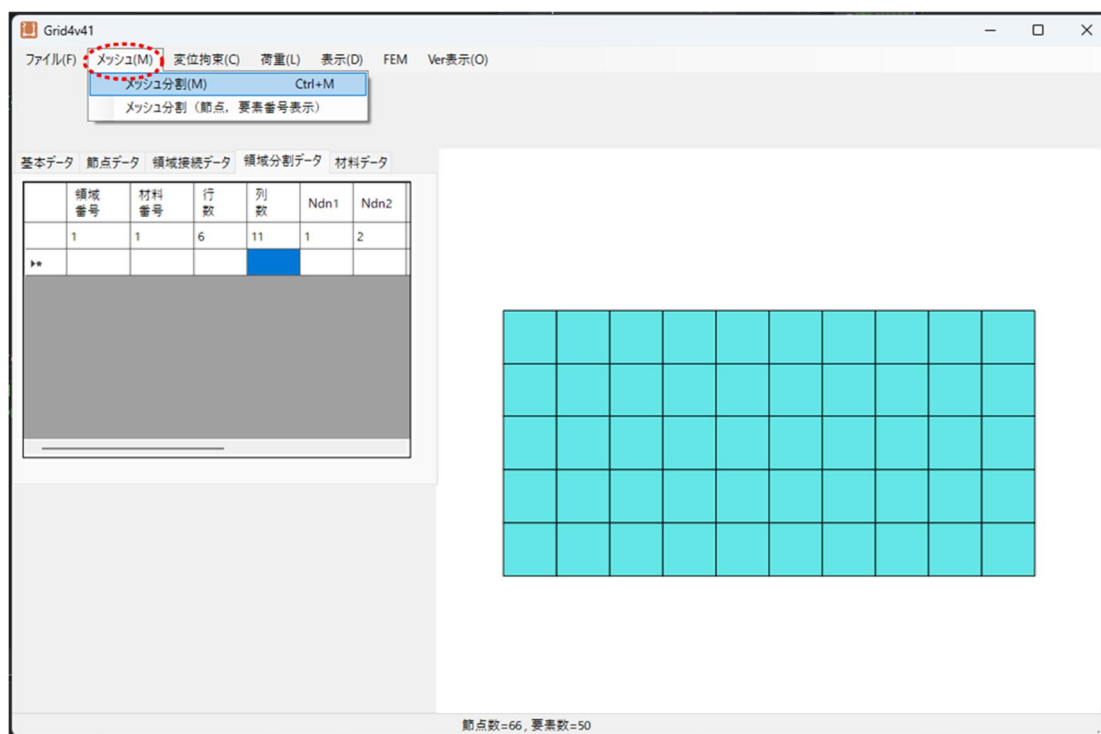


図 10 長方形領域のメッシュ分割 (6×11)

た図が表示される．ここで，図 10 のメッシュ図においては

- ・マウスのセンターホイールによるメッシュ図の拡大・縮小
- ・マウスの左ボタンのドラッグによるメッシュ図の移動

が可能であり，Google Maps と同様な操作性を有している．

また，「領域分割データ」の行分割数，列分割数を書き換えれば，メッシュの細かさを容易に調整できる．図 11 は，行分割数を 21，列分割数を 41 と書き換え，「メッシュ」→「メッシュ分割」を実行した結果である．

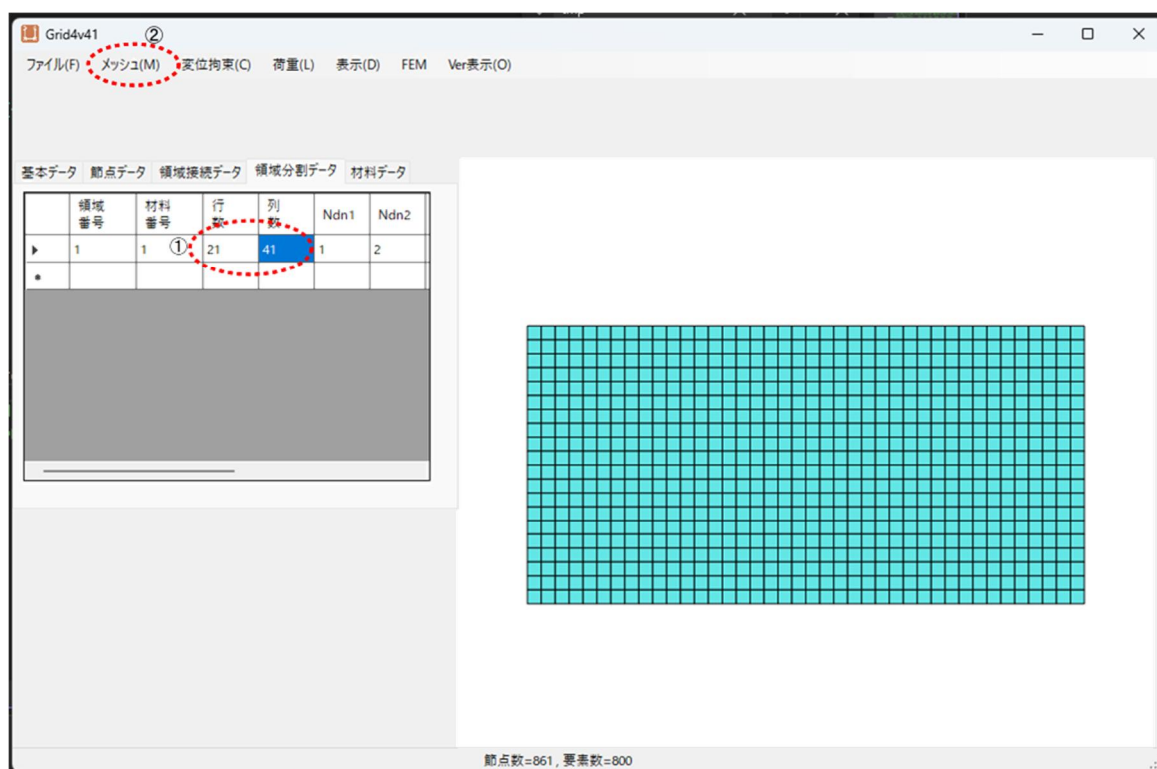


図 11 長方形領域のメッシュ細分割 (21×41)

このように，自在にメッシュの細かさを調整できるのが本プログラムの特長の一つである．

拘束条件，荷重条件および FEM ファイルの出力については，次の例題で詳しく述べる．

### 5.3 データファイルのテキストエディタによる作成

前節では，DataGrid に入力したデータについては，ファイルとしてセーブできることを示した．そのかわりに，DataGrid を経由せずに，テキストファイルを作成するエディタ，あるいは Microsoft Word などを用いてファイルを作成してもよい．データ作成の場合には，入力文字はすべて半角とし，データの区切りにコンマを用いる．なお，1 行目には「Two Dimensional Elastic Problem」という問題のコメントを挿入する．また，データを見やすくするために，適当に半角を入れてもよい．

Microsoft Word を用いてデータを作成する場合には，データを作成後（すべて半角文字で作成すること）に，1)「ファイル」→「名前を付けて保存」，2) 保存先を選ぶ，3)「ファイル名」欄に，拡張子を含めた名前を入力（例：enkou.csv），4)「ファイルの種類」欄は「すべてのファイル (.\*)」を選択，5)「保

存」をクリック、とすればよい。

## 5.4 円孔を有する帯板

次に、図 1 の円孔を有する帯板のメッシュ生成を考える。図 1(c)の領域に対して、3.4 節に示したデータを DataGrid に入力した結果を図 12 に示す。あるいは、メニューバーの「ファイル」→「読み込み」から、添付したサンプルデータ enkou.csv を読ませてもよく、図 12 と同様な DataGrid の結果を得る。

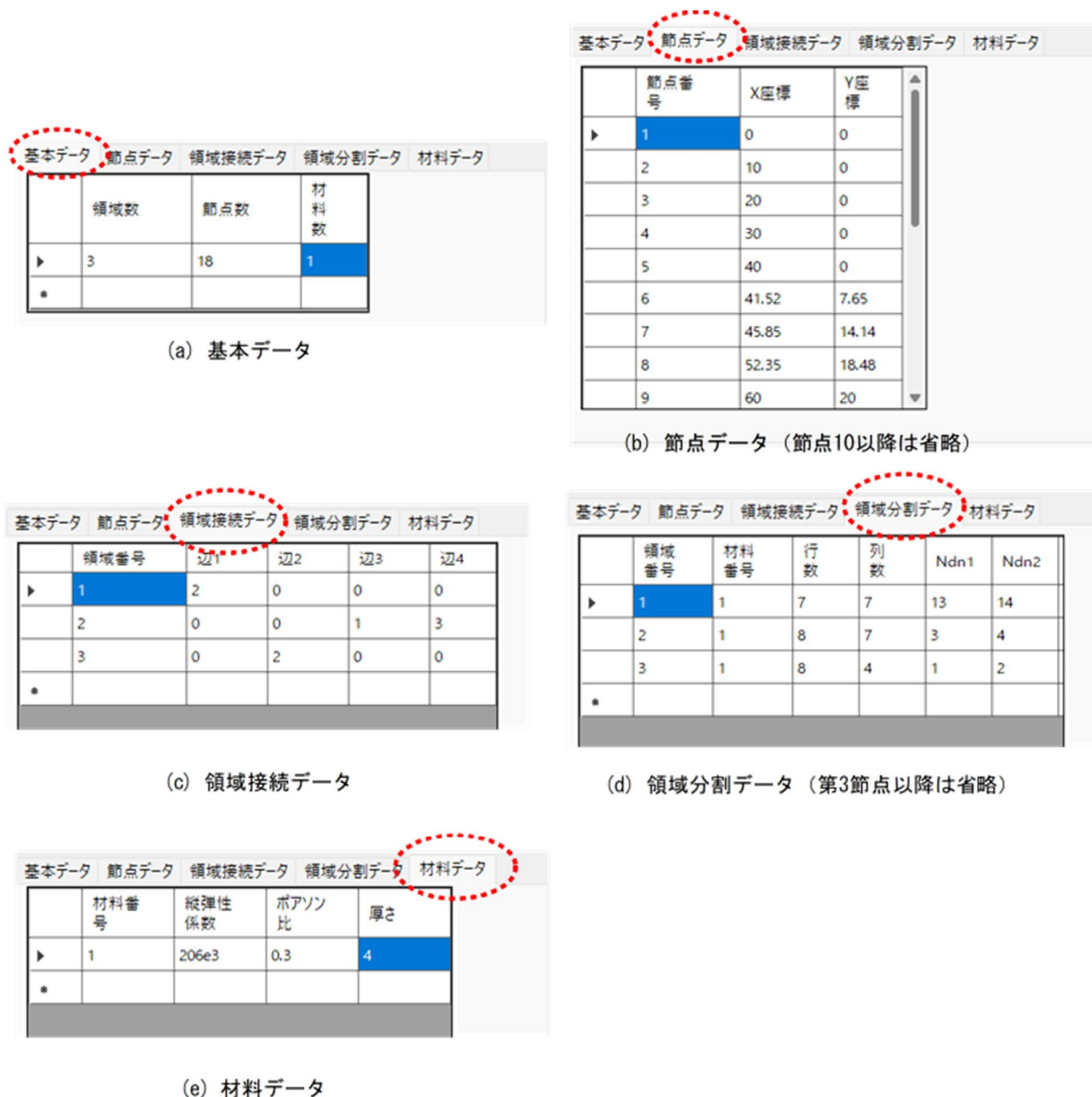


図 12 円孔を有する帯板のデータ

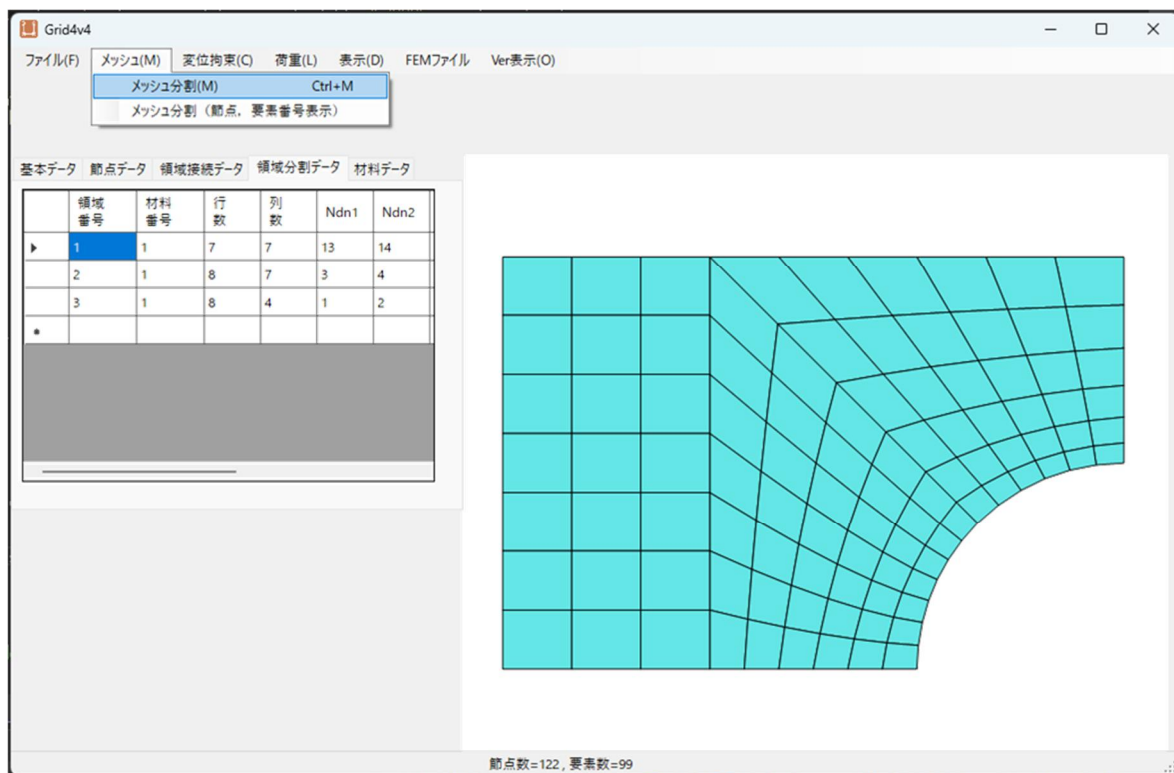


図 13 領域の四角形要素分割結果（122 節点，99 要素）

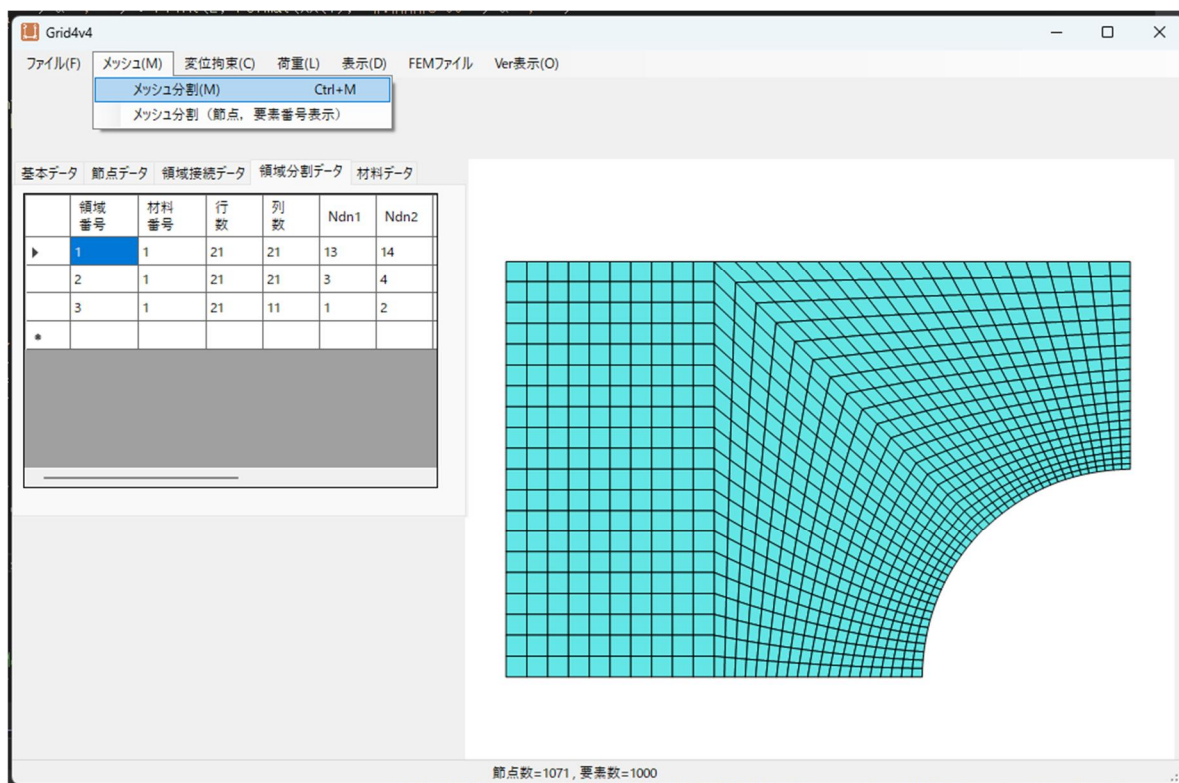


図 14 領域の四角形要素細分割結果（1071 節点，1000 要素）

その後、メニューバーの「メッシュ」→「メッシュ分割」を選ぶと、図 13 のような四角形要素分割結



果を得る。

行および列分割数については、領域 1 は  $7 \times 7$ 、領域 2 は  $8 \times 7$ 、そして領域 3 は  $8 \times 4$  と与えており、総節点数 122 個、総要素数 99 個となっている。

さらに、この領域をより細かく分割しよう。「領域分割データ」の DataGrid タブを選び、行および列分割数のセルを、領域 1 は  $21 \times 20$ 、領域 2 は  $19 \times 20$ 、そして領域 3 は  $19 \times 11$  と変更し、メニューバーの「メッシュ」→「メッシュ分割」を選ぶと、図 14 のような要素分割図を得る。

これにより、総節点数が 122 から 1071 に一気に増えて、より細かいメッシュを生成することができる。

この際に、図 15 の色分けしたセルに示すように

- 1) 領域 1 の列分割数＝領域 2 の列分割数 (=20)
- 2) 領域 2 の行分割数＝領域 3 の行分割数 (=19)

の関係を満たさないと、正しい要素分割が得られないことを 3.2 節で注意した。このため、本プログラムでは、自動的にこの関係が満たされるようにプログラミングして、ユーザーの便宜を図っている。

例えば、領域 1 の列分割数(本例では 20)の数値を入力したときに、同時に領域 2 の列分割数のセルが同じ数値(本例では 20)となる (fill-in, 自動補完) になっている。あるいは、先に領域 2 の列分割数 (20) を入力したときには、自動的に領域 1 の列分割数に 20 が fill-in される。領域 2 の行分割数と領域 3 の行分割数についても同様な fill-in が行われる。この結果、メッシュ細分割作業がより効率化される。

基本データ	節点データ	領域接続データ	領域分割データ	材料データ		
	領域番号	材料番号	行数	列数	Ndn1	Ndn2
	1	1	21	20	13	14
	2	1	19	20	3	4
	3	1	19	11	1	2
▶▶						

図 15 各領域の行分割数、列分割数の整合性

## 5.5 リナンバリングについて

図 13 に示したように、これまで示したブロック分割法では総節点数が 122、総要素数 99 となることがわかる。これらの節点には、当初は、図 16 に示すように網の目の規則性に応じた、機械的な番号付けがなされている。

すなわち、領域 (1) では、格子点に 1 から 49 まで、領域 (2) では、格子点に 50 から 98 まで、領域 (3) では、格子点に 99 から 122 までに規則的に節点番号が振られる。しかし、この番号づけでは、要素を囲む 4 節点の番号差を小さくするという配慮が行われていない。たとえば、領域 (3) の右上の要素 (要素番号 81) では、104, 50, 43, 101 の節点番号となっていて番号差が 61 となっており、このまま



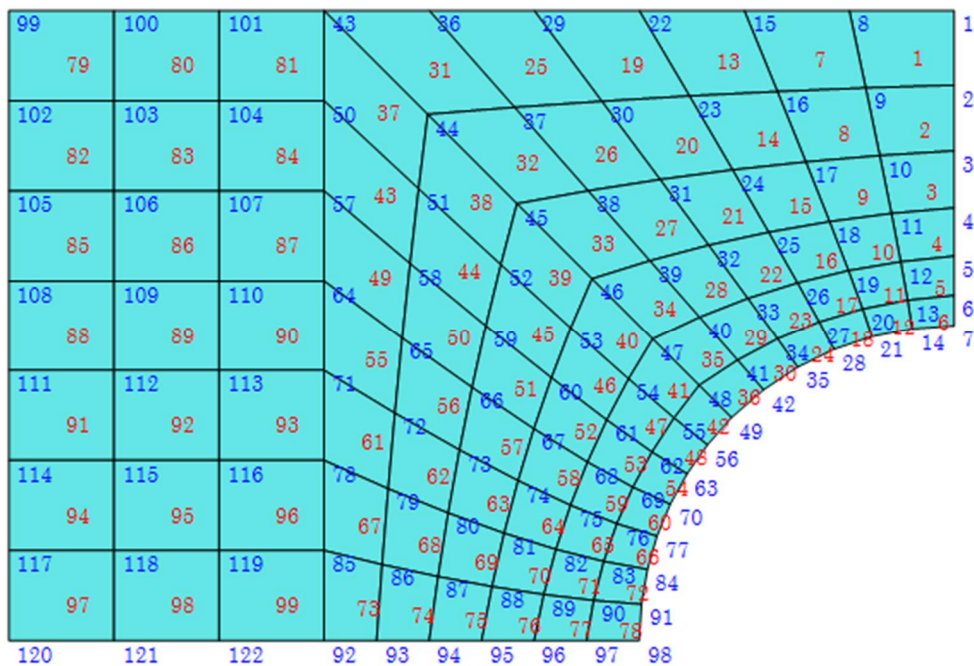


図 16 ブロック分割法によるナンバリング

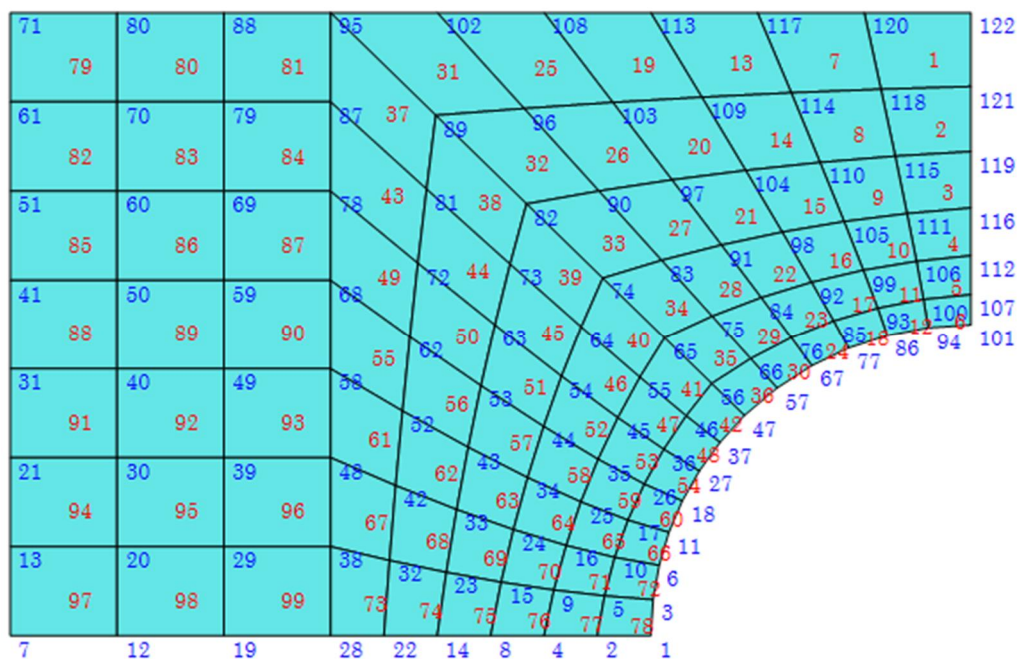


図 17 Reverse Cuthill-McKee (RCM) 法による節点番号のリナンバリング

の節点番号では、FEM の定式化後に得られる連立一次方程式を解くには、計算アルゴリズムの観点から適切とはいえない。

そこで、本プログラムでは Cuthill および McKee らが提案したバンド幅最小化アルゴリズム<sup>(4)</sup>によって節点番号のつけ替えを行うようにしている。その実行結果を図 17 に示す。これにより、例えば要素番号 81 の要素では、節点番号が 79, 87, 95, 88 につけ変わり、節点番号差が 16 までに縮小されている

ことがわかる。

なお、この節点番号最適化処理は、ユーザーには見えない形で処理されているのでユーザーは特別に何かをする必要はない。

ここで、**Reverse Cuthill-McKee (RCM) 法** とは、簡単に言えば、「節点番号が  $i$  番目まで決定した場合、その次の節点番号  $i+1$  は、番号づけのされていない節点から、 $i$  番目の節点から最も近い距離（物理的な距離ではなく、グラフ理論に基づく距離、すなわち節点間の連結関係の階層数を指す）にある節点を選ぶ」という考え方である。この考えに従えば、各々の要素を囲む 3 節点の番号差が小さくなることが見込まれる。これは、FEM の全体剛性方程式の係数マトリックスの非対角成分が対角成分の近くに寄り集まってくることを意味し、結局は、連立一次方程式を効率的に解くことにつながる。

参考までに、図 1(c)の領域に対して、ファイルセーブしたときのデータ enkou.csv の実際の内容を以下に示す。

#### 【enkou.csv の内容】

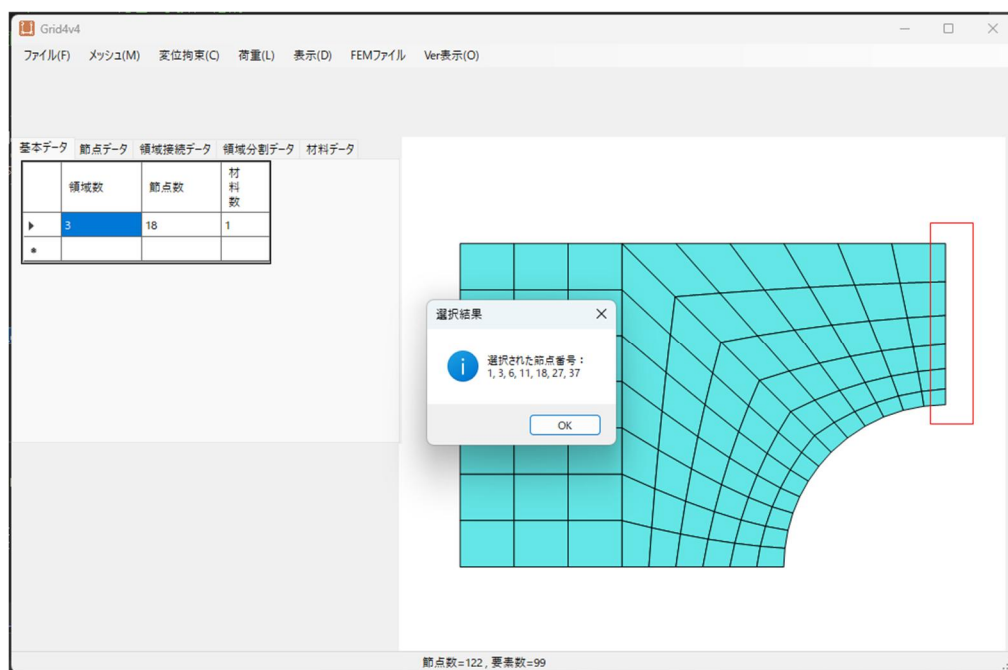
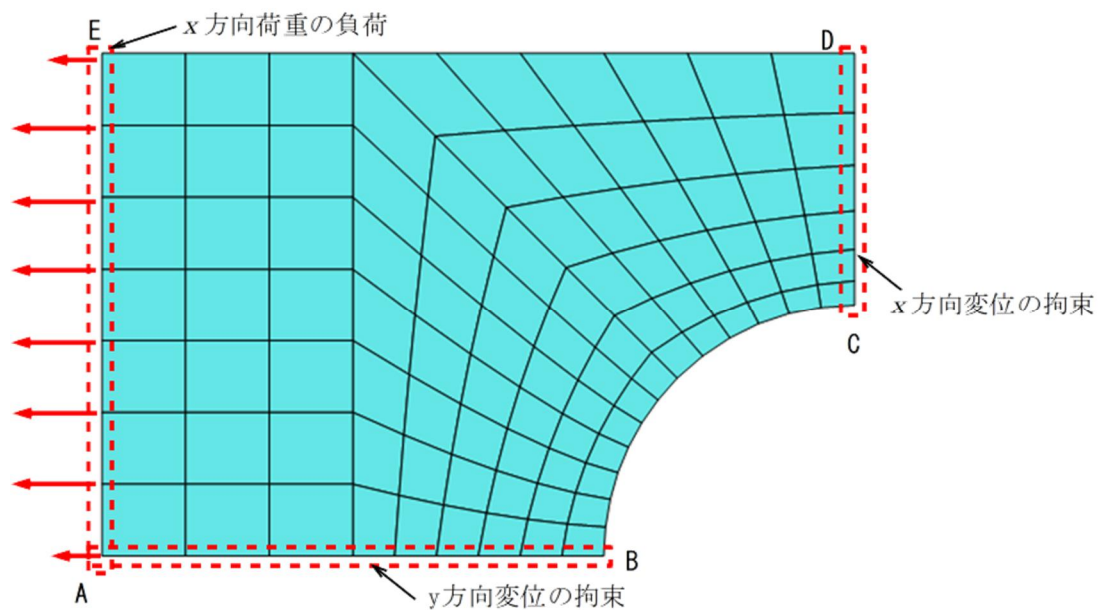
Two Dimensional Elastic Problem	13, 20.0, 40.0
3, 18, 1	14, 37.0, 23.0
1, 0.0, 0.0	15, 10.0, 40.0
2, 10.0, 0.0	16, 0.0, 40.0
3, 20.0, 0.0	17, 0.0, 20.0
4, 30.0, 0.0	18, 20.0, 20.0
5, 40.0, 0.0	1, 2, 0, 0, 0
6, 41.52, 7.65	2, 0, 0, 1, 3
7, 45.85, 14.14	3, 0, 2, 0, 0
8, 52.35, 18.48	1,1,7,7,13,14,7,8,9,10,11,12
9, 60.0, 20.0	2,1,8,7, 3, 4,5, 6, 7,14,13,18
10, 60.0, 27.5	3,1,8,4, 1, 2,3,18,13,15,16,17
11, 60.0, 40.0	1, 206e3, 0.3, 4.0
12, 40.0, 40.0	

## 5.6 拘束条件および荷重条件の設定

次に、円孔を有する帯板が左右に引張り力を受ける場合について、その拘束条件の設定例を以下に示す。

帯板の中央は左右に移動しないから、図 18 の辺 CD の  $x$  方向の変位はゼロであり、これを拘束条件と考える。また、図 18 の辺 AB の  $y$  方向変位もゼロとなるから、これも拘束条件と考える。

そこで、メニューバーの「変位拘束」→「 $x$  方向変位拘束」とたどり、「OK」をクリックして、右ボタンで  $x$  方向変位を拘束したい節点をラバーバンドで囲むと図 19 のような画面になる。これにより、7 個の節点を選ばれ、 $x$  方向の拘束変位量（ゼロがデフォルト）を



0 のまま「OK」をクリックすればよい。同様に、辺 AB についても  $y$  方向変位拘束量をゼロと指定する操作を行う。

荷重を指定するには、以下のように考えればよい。図 1(a)の帯板を左右から 9800 N で引張る場合を想定する。すると、図 20(a)の左側の垂直な辺 AE には 4900 N の力が作用する。これを垂直辺の面積（ $A$  とする）あたりの力  $p_0$  で考えると

$$p_0 = \frac{P}{A} = \frac{4900}{40 \times 4} = 30.625 \approx 30.6 \text{ N/mm}^2 \quad (1)$$

が左辺に作用することになる。

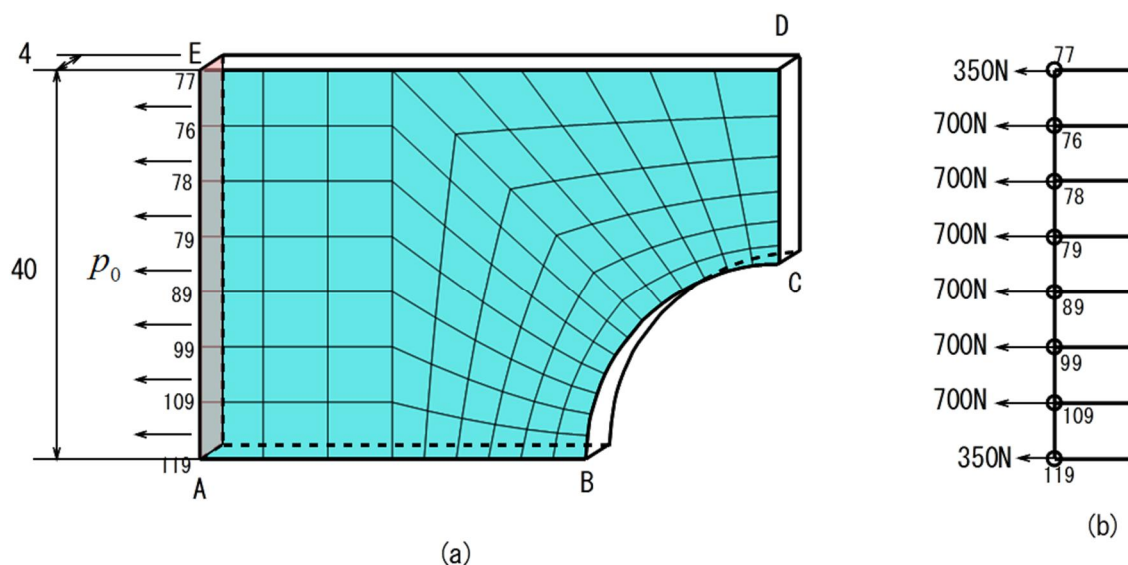


図 20 分布荷重の節点への振り分け

また、辺 AE には同じ大きさの 7 個の要素が縦に並んでいるので、一つの要素には、左方に

$$F = p_0 \frac{A}{7} = \frac{P}{7} = \frac{4900}{7} = 700 \text{ N} \quad (2)$$

の力が作用する。荷重が作用する要素の荷重面には 2 つの節点が配置されているので、最終的には一つの節点あたりに 350 N の節点力が作用することになる。これらの力をそれぞれの節点に加えると、結局、全荷重 9800N は図 20(b)のような節点力として分配される。

以上の節点荷重値をもとに、メニューバーから、「荷重」→「x 方向荷重」とたどり、図 21(b)の 700 N が作用する節点をラバーバンドで囲んで、x 方向荷重値として「-700」を入力すればよい（負号を忘れないこと）。同様に、350 N の作用する節点を選んで x 方向荷重値として「-350」を入力する（この操作は、上端の節点 122 と下端の節点 88 に対して 2 回繰り返す）

変位拘束条件や荷重条件を表示するには、メニューバーの「表示」→「境界条件」とすればよく、図 21 のような拘束記号、荷重ベクトルが表示される。

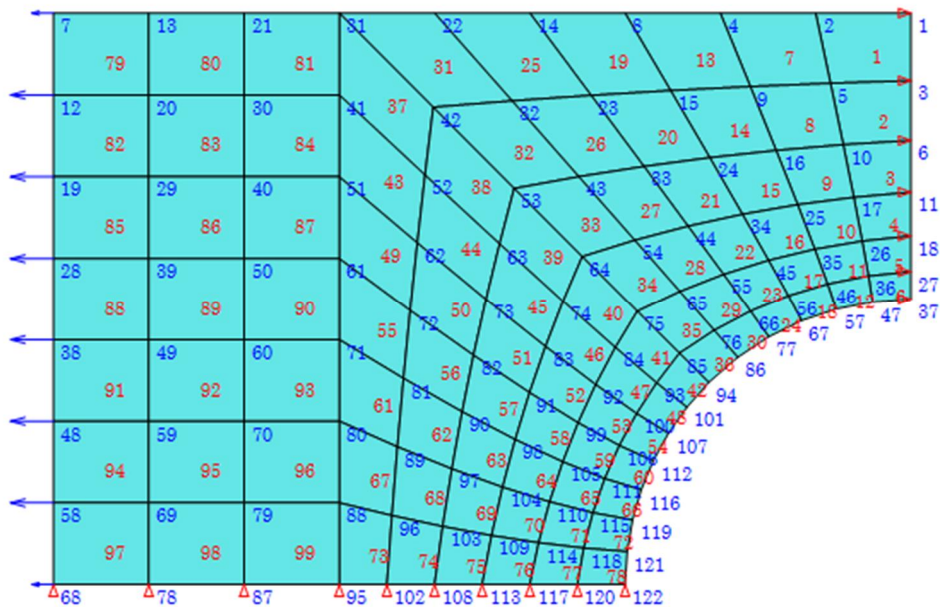


図 21 拘束条件，荷重条件の表示

## 5.7 ファイル出力と FEM の実行

以上により，要素分割や拘束節点および荷重節点の指定を終えた．次は，メニューバーの「FEM」→「実行」とたどって，要素分割から荷重設定までのこれまでの結果を FEM 解析が必要とする形式でファイルとして出力すると同時に FEM を実行する．ここで，ファイル名は，デフォルトで isop4meshresult.tmp としており

基本データ（ただし，総節点数，材料数，総要素数，拘束節点数，荷重節点数）

節点データ（節点番号， $x$ ， $y$ 座標）

材料データ（ヤング率，ポアソン比，板厚（平面応力の場合には実際の厚さ，平面ひずみの場合には 0.0 が与えられる）

要素データ（要素番号，左回りに要素を囲む 4 個の節点番号，材料番号）

拘束データ（拘束節点番号， $x$  拘束(0 or 1)， $x$  拘束量， $y$  拘束(0 or 1)， $y$  拘束量）

荷重データ（荷重節点番号， $x$  方向荷重， $y$  方向荷重）

データタイトル（2D FEM analysis by isop4）

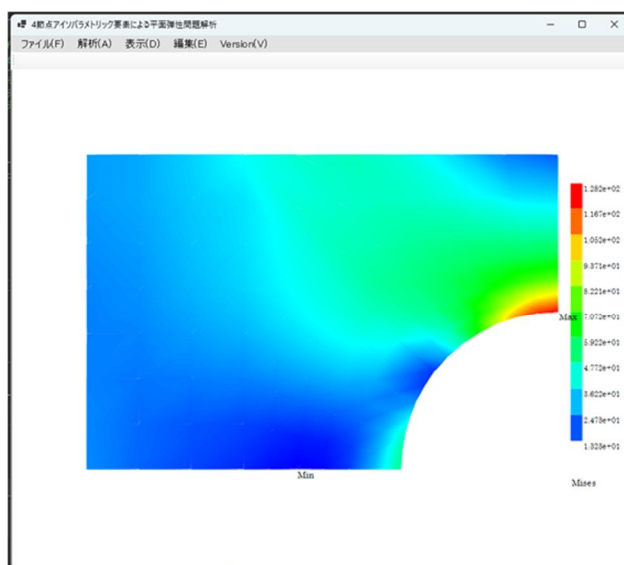
という内容で出力される．このファイルは，出力された後にただちに四角形要素を用いた平面弾性解析プログラム isop41.exe により読み込まれ，FEM 解析が実行される．FEM 実行後は FEM に関するウィンドウが現れて，変形図を描画する．

以下は，isop4meshresult.tmp の内容（一部省略）である．

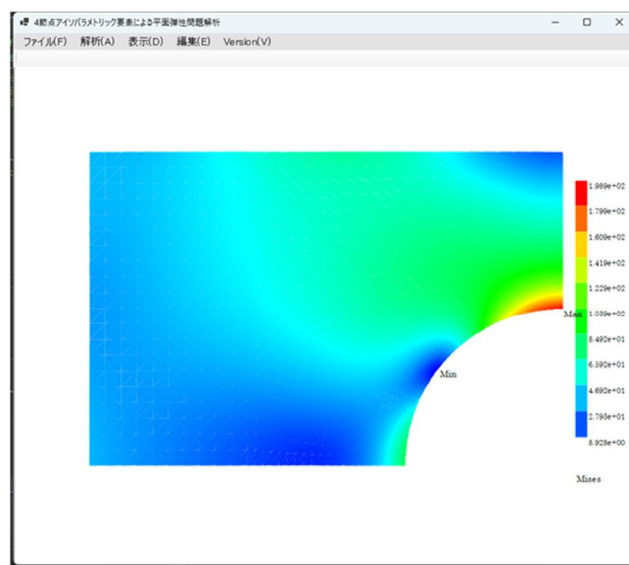
122, 1, 99, 17, 8	98, 69, 79, 87, 78, 1
1, 6.0000e+01, 4.0000e+01	99, 79, 88, 95, 87, 1
2, 5.3333e+01, 4.0000e+01	1, 1, 0, 0, 0
3, 6.0000e+01, 3.5278e+01	3, 1, 0, 0, 0
4, 4.6667e+01, 4.0000e+01	6, 1, 0, 0, 0
5, 5.4375e+01, 3.5100e+01	11, 1, 0, 0, 0
6, 6.0000e+01, 3.1111e+01	18, 1, 0, 0, 0
7, 0.0000e+00, 4.0000e+01	27, 1, 0, 0, 0
8, 4.0000e+01, 4.0000e+01	37, 1, 0, 0, 0
9, 4.8772e+01, 3.4870e+01	68, 0, 0, 1, 0
.....	78, 0, 0, 1, 0
..... (途中省略) .....	87, 0, 0, 1, 0
.....	95, 0, 0, 1, 0
120, 3.6667e+01, 0.0000e+00	102, 0, 0, 1, 0
121, 4.0148e+01, 2.3041e+00	108, 0, 0, 1, 0
122, 4.0000e+01, 0.0000e+00	113, 0, 0, 1, 0
1, 206000, 0.3, 4	117, 0, 0, 1, 0
1, 1, 3, 5, 2, 1	120, 0, 0, 1, 0
2, 3, 6, 10, 5, 1	122, 0, 0, 1, 0
3, 6, 11, 17, 10, 1	12, -700, 0
4, 11, 18, 26, 17, 1	19, -700, 0
5, 18, 27, 36, 26, 1	28, -700, 0
6, 27, 37, 47, 36, 1	38, -700, 0
7, 2, 5, 9, 4, 1	48, -700, 0
.....	58, -700, 0
..... (途中省略) .....	7, -350, 0
.....	68, -350, 0
97, 58, 69, 78, 68, 1	2D FEM analysis by isop4

図 22(a)は、データ isop4meshresult.tmp を FEM 実行プログラム isop41.exe が読み込み、Mises 応力のコンター図の出力を行った例（出力図の操作については後述）である。円孔周辺の応力集中の様子が正しく表現されていることがわかる。なお、ここに取り上げた例の節点数（122 節点）は、説明の便宜上、やや少ない分割数であったが、解析精度を高めたい場合にはより細かな要素分割が好ましい。図 22(b)は、図 14 のように 1071 節点まで細かく分割した場合の Mises 応力のコンター図である。図 22(a)よりも滑らかな Mises 応力分布が得られていることがわかる。





(a) 122節点の分割の場合のMises応力



(b) 1071節点の分割の場合のMises応力

図 22 本プログラムの出力データによる FEM 解析結果 (Mises 応力のコンター図)

## 5.8 その他の分割例

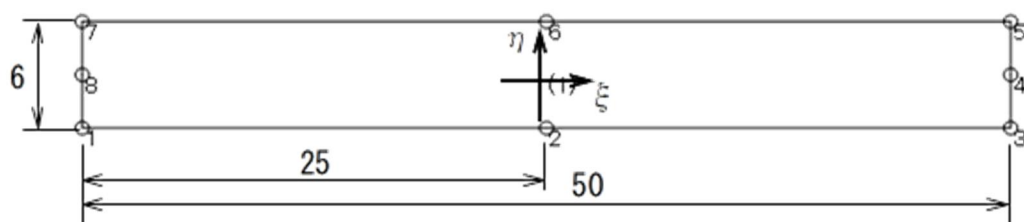
ほかの形状に対して、データおよび要素分割した 2, 3 の例を以下に示す.

【例題 1】(ファイル名 : beam0.csv)

図 23(a)のような、はりのような横長の長方形領域の分割を考える. 各辺の中間節点 2, 4, 6, 8 は, それぞれの辺の中央にあるものとする. これに対し, 以下のような基本データを準備する.

Beam Subjected to Shear Force	6, 25.0, 6.0
1, 8, 1	7, 0.0, 6.0
1, 0.0, 0.0	8, 0.0, 3.0
2, 25.0, 0.0	1, 0, 0, 0, 0
3, 50.0, 0.0	1, 1, 6, 41, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
4, 50.0, 3.0	1, 206e3, 0.3, 1.0
5, 50.0, 6.0	

ここで, 領域を 6 本の水平線および 41 本の垂直線で格子状に分けて四角形要素を作成するものとする. この結果, 図 23(b)のような, 総節点数 248 個で同じ大きさの四角形要素から成る分割図を得る.



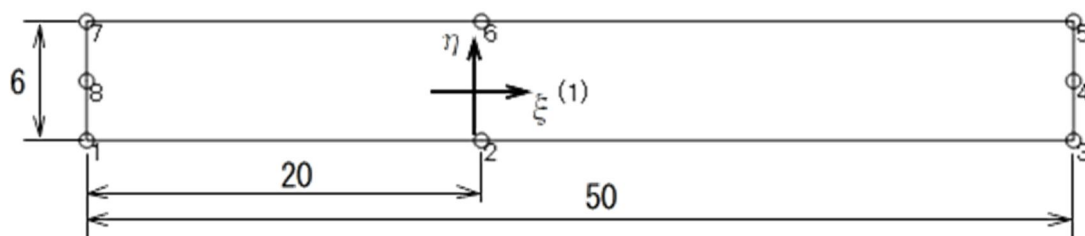
(a) 細長い長方形領域



(b) 四角形要素分割結果

図 23 細長い長方形領域の四角形要素分割 (246 節点, 200 要素)

次に、図 24(a)の中央節点 2, 6 の  $x$  座標を 25.0 から 20.0 に左方に移動させた図 24 (a) の分割を考える (ファイル名: beam1.csv). この場合の四角形要素分割では、図 24(b)に示すように、中間節点を移動させた側に密に要素が生成される. このように、縦横の格子線の分割線数のほかに、中間節点を移動させることによって要素分割の粗密さを調整することができる.



(a) 細長い長方形領域



(b) 四角形要素分割結果

図 24 長方形領域の四角形要素分割 (中間節点 2, 6 を左方に移動した場合) (246 節点, 200 要素)



**【例題 2】** L 字形領域（ファイル名：LshapeBeam.csv）

図 25 のような寸法を与えた L 字形領域の分割を考える．領域は 3 個に分けられるが，それぞれの弾性係数が異なるものとする．領域（1）では， $E_1=206\times 10^3$  N/mm<sup>2</sup>，領域（2）では， $E_2=100\times 10^3$  N/mm<sup>2</sup>，領域（3）では， $E_3=70\times 10^3$  N/mm<sup>2</sup>，とする．

基本データ（3 個の材料を想定）

L shaped region	14, 0.0, 7.5
3, 18, 3	15, 5.0, 7.5
1, 0.0, 0.0	16, 0.0, 10.0
2, 2.5, 0.0	17, 2.5, 10.0
3, 5.0, 0.0	18, 5.0, 10.0
4, 7.5, 0.0	1, 0, 2, 3, 0
5, 10.0, 0.0	2, 0, 0, 0, 1
6, 0.0, 2.5	3, 1, 0, 0, 0
7, 5.0, 2.5	1, 1, 10, 10, 1, 2, 3, 7, 11, 10, 9, 6
8, 10.0, 2.5	2, 2, 10, 10, 3, 4, 5, 8, 13, 12, 11, 7
9, 0.0, 5.0	3, 3, 10, 10, 9, 10, 11, 15, 18, 17, 16, 14
10, 2.5, 5.0	1, 206e3, 0.3, 1.0
11, 5.0, 5.0	2, 100e3, 0.3, 1.0
12, 7.5, 5.0	3, 70e3, 0.3, 1.0
13, 10.0, 5.0	

このデータに従って分割した結果を図 26 に示す．

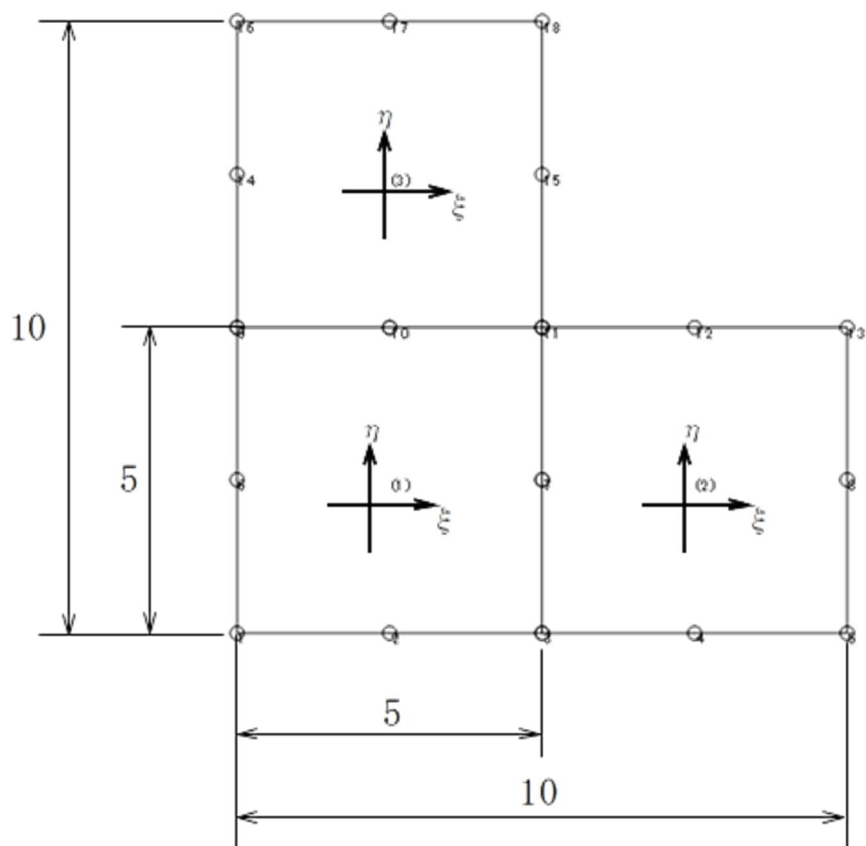


図 25 L 字形領域

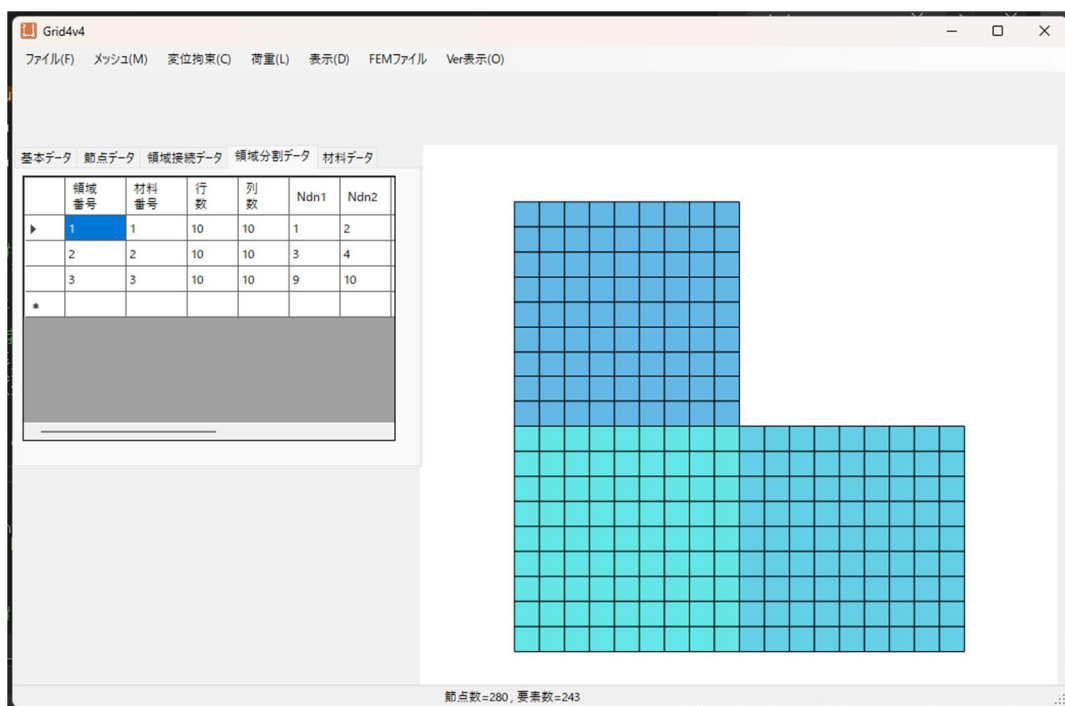


図 26 L 字形領域の四角形要素分割結果 (280 節点, 243 要素)

【例題 3】 穴の空いた部分円輪（ファイル名：frange2.csv）

図 27 のように、1/4 の部分円輪（内径 50mm、外径 100mm）に、直径  $d=20\text{mm}$  の穴が空いた領域の要素分割を考える。穴の位置は、 $x$  軸から  $45^\circ$  の方向で、円輪幅の中央に中心があるものとする。この場合、図のような 6 個の領域に分けた。なお、ここでは基本データの内容については省略し、興味のある方は frange2.csv の DataGrid 画面に表示される値を参照すること。

図 28 は、穴の空いた部分円輪を四角形要素に分割した結果である。本例の場合の総節点数は、540 個である。

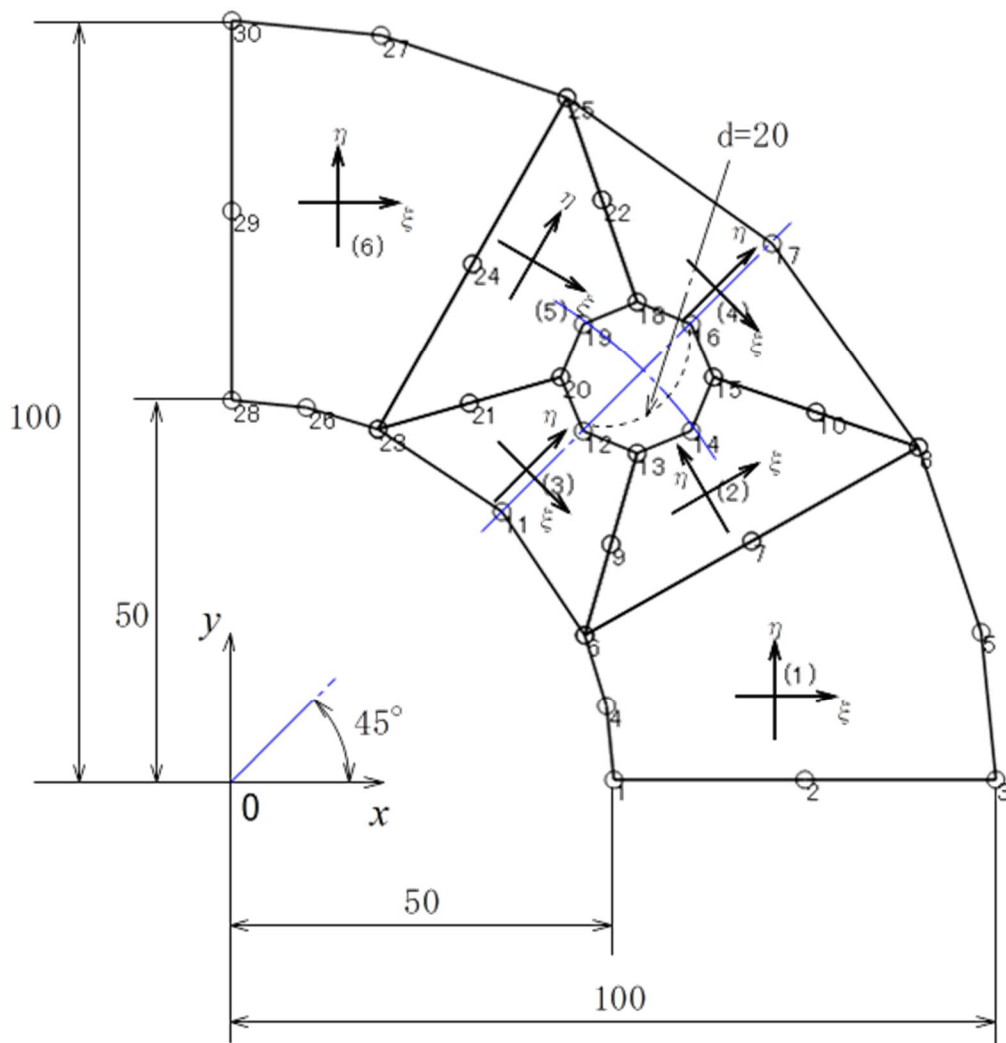


図 27 穴の空いた部分円輪領域

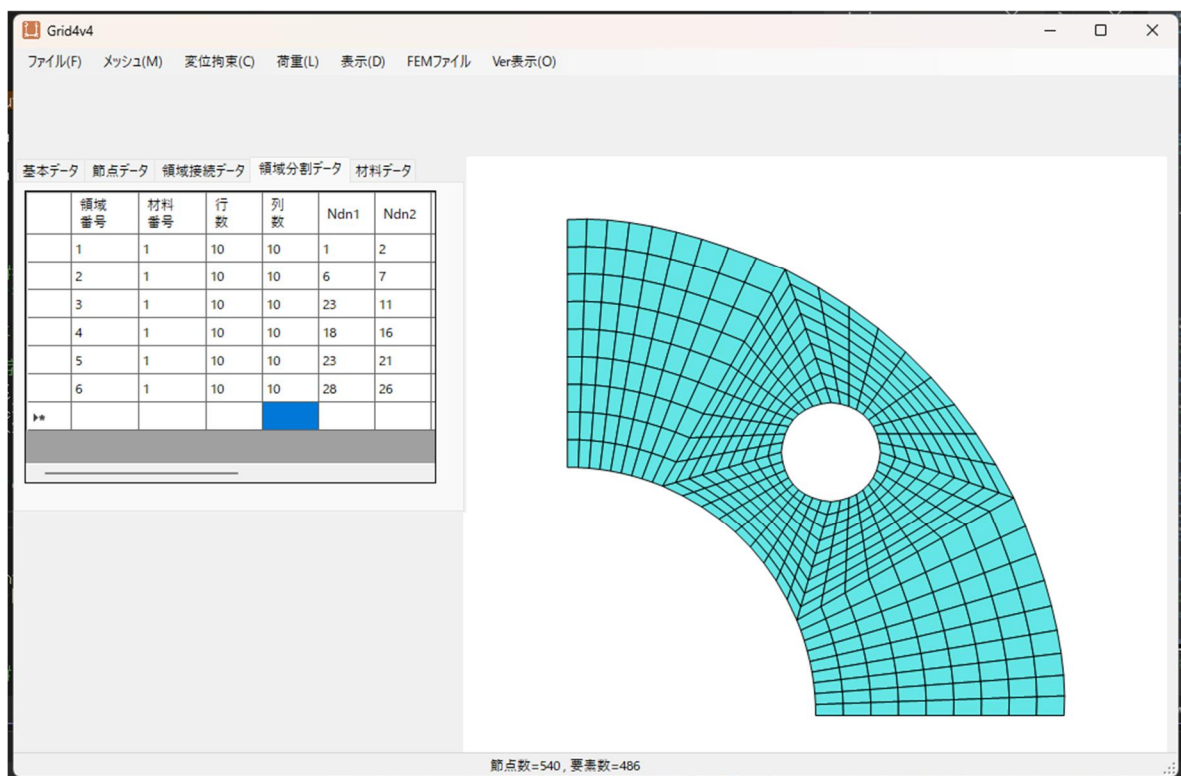


図 28 穴の空いた部分円輪の四角形要素分割結果（540 節点，486 要素）

## 6. FEM の実行

### 6.1 はりの曲げの例

図 29 に示した長さ  $l=500\text{mm}$ 、高さ  $h=100\text{mm}$ 、厚さ  $t=5\text{mm}$ 、縦弾性係数  $E=206 \times 10^3 \text{N/mm}^2$  の細長い薄板（以下、はりと呼ぶ）の曲げを例にして、FEM の実行の流れを以下に説明する。

各 DataGrid に必要なデータを入力し、横長の領域を図 29 のように  $6 \times 21$  に分割する。左端の縦辺を完全拘束 ( $x, y$  方向の変位を 0 に拘束) し、右端の縦辺の 6 個の節点に対して、それぞれ  $y$  の負の方向に  $-500\text{N}$  の荷重（合計  $3000\text{N}$ ）を負荷する場合を考える。このような設定を行った後に、ツールメニュー「FEM」→「実行」を選択すると、図 30 のような変形図を描画するウィンドウが現れる。つまり、本プログラムは、メッシュデータと境界条件を指示すれば、FEM 解析を即座に実行できるように構成されている。

本問題はわずか 126 節点の小規模な問題なので解析は瞬時に終了する。なお、数千節点の規模の問題であっても、リナンバリングとスカイライン法を併用しているために数秒で解析が終了する。

図 30 では、はりの変形後の様子が赤い破線で示され、最大変位の生じる節点近傍に「Max」という文字が表示される。わかりやすさのために、変位の大きさは実際の変位をすこし大げさに拡大して（最大変位の大きさが画面の大きさの 10% としている）表示している。

さらに、マウスを節点近くに移動させると（マウスホバー (mouse hover) という）、その節点の変位（と同時に応力成分も）の大きさが、 $x, y$  成分ごとにポップアップ表示される。図 30 には、右下の節点 126 の近くにマウスを近づけたときの変位 ( $u_x = -0.212\text{mm}$ ,  $u_y = 1.450\text{mm}$ ) や応力の値がポップアップされる様子が示されている。

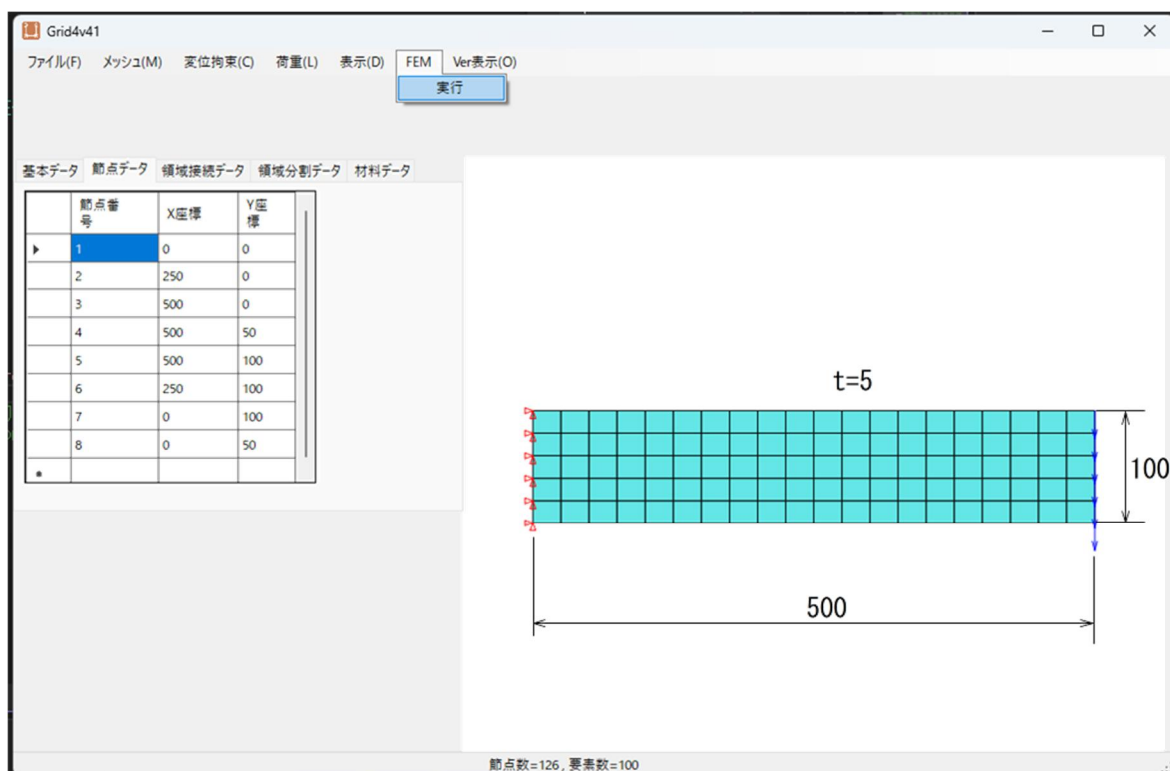


図 29 長方形領域のメッシュ分割と境界条件

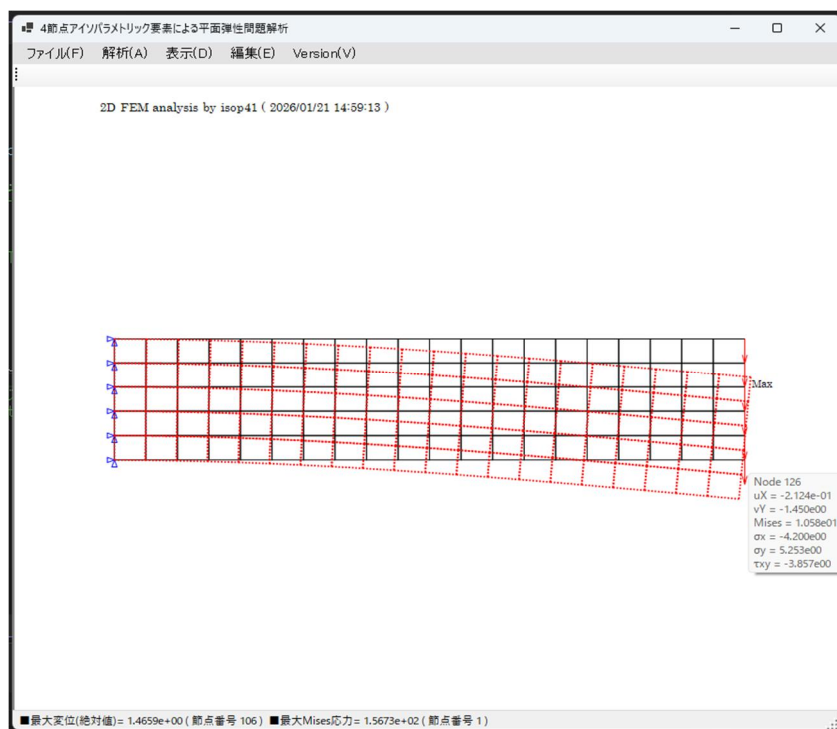


図 30 別のウィンドウによる変形図の表示

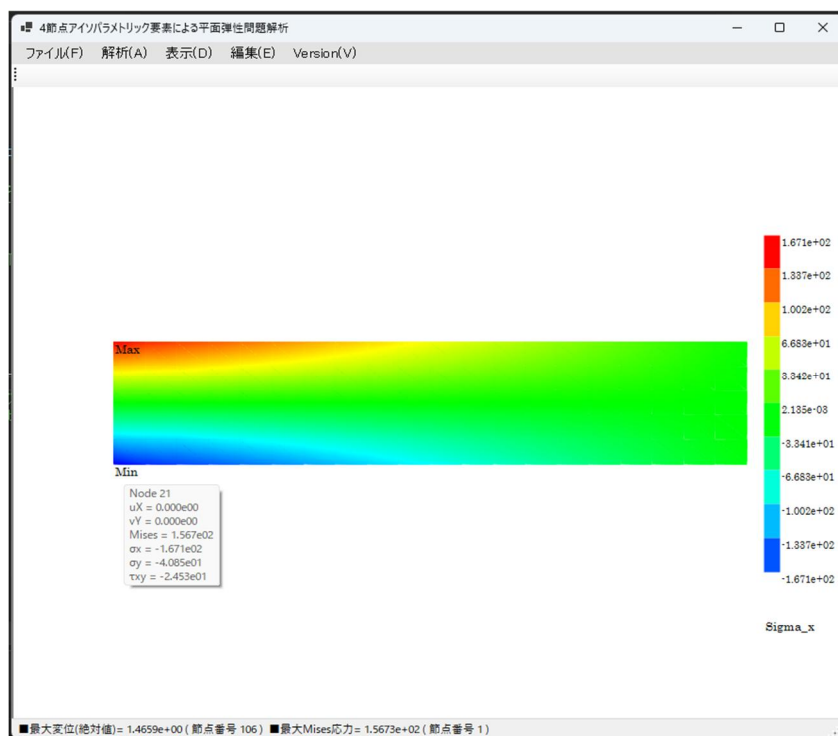


図 31 応力  $\sigma_x$  のコンターマップ

次に、ツールメニュー「表示」→「応力」とたどれば、4つの応力成分（Mises 応力， $\sigma_x$ ， $\sigma_y$ ，

$\tau_{xy}$ ) のカラーマップ (コンター図ともいう) を得ることができる。図 31 は、「表示」→「応力」→「Sigma-x」とたどったときの応力のカラーマップの図である。

図 31 では、応力の最小値から最大値までを 10 等分した色づけによって要素の応力が表示される。画面の右には、色の対応した凡例が示される。また、最大応力、最小応力の生じている節点の近くに「Max」, 「Min」と表示される。

なお、変位と同様、節点の近くにマウスホバーすると、その節点の応力 (および変位) 値がポップアップ表示される。図 31 には、固定部上側の節点番号 1 の応力値 (および変位の値) がポップアップ表示され、その大きさが  $\sigma_x = -167.1 \text{ N/mm}^2$  (負号は圧縮応力) と読み取れる。

材料力学によれば、幅  $b$  (図 1 では、厚さ  $t$  に相当)、高さ  $h$  の断面を有する片持ちはりの固定端の応力  $\sigma$  は、 $P$  をはり先端に作用する荷重として

$$\sigma = \frac{M}{bh^2/6} = \frac{6Pl}{bh^2} \quad (1)$$

と表される<sup>5)</sup>。本問題では、 $P=1000 \times 3=3000 \text{ N}$ ,  $l=500 \text{ mm}$ ,  $b (=t)=5 \text{ mm}$ ,  $h=100 \text{ mm}$  であるから

$$\sigma = \frac{6 \times 3000 \times 500}{5 \times 100^2} = 180 \text{ N/mm}^2 \quad (2)$$

と得られる。FEM の結果 ( $167 \text{ N/mm}^2$ ) は式(2)より 7.2%小さいが、これはメッシュがやや粗いためである。

はりの先端のたわみ  $\delta$  は、はり理論によれば

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{Pl^3}{3E(bh^3/12)} = \frac{4Pl^3}{Ebh^3} \quad (3)$$

である。本問題の数値を代入すると

$$\delta = \frac{4Pl^3}{Ebh^3} = \frac{4 \times 3000 \times 500^3}{206 \times 10^3 \times 5 \times 100^3} = 1.456 \text{ mm} \quad (4)$$

と得られる。FEM の結果は、 $\delta = u_x = 1.450 \text{ mm}$  であるので、この結果は式 (4) より 0.4%小さいだけである。有限要素法は、変位関数を仮定してから理論展開しているので、変位の微分によって得られる応力は変位に比べてその精度が低い。

参考までに、より細かな要素分割 (561 節点, 500 要素) による結果を図 6 に示す。

本問題のように、はりの長さ  $l$  に対する高さ  $h$  の比  $h/l$  が大きい場合には、せん断力によるたわみも考慮する必要がある。せん断力の影響を考慮したはり先端のたわみは

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI} \left( 1 + 0.975 \frac{h^2}{l^2} \right) = \frac{4Pl^3}{Ebh^3} \left( 1 + 0.975 \frac{h^2}{l^2} \right) = 1.512 \text{ mm} \quad (5)$$

である<sup>5)</sup>から、このたわみは、FEM によって得られた図 5 の先端変位  $\delta = 1.506 \text{ mm}$  とよい一致を示している。

本プログラムでは、マウスホイールの回転で図形の拡大縮小、マウスの左ボタンのドラッグで移動が自由に行えるようになっている。解析対象を拡大表示して応力を表示すれば、応力を仔細に把握できる。図 33 は、解析対象の固定端付近を拡大表示して、応力値などをポップアップ表示した例である。

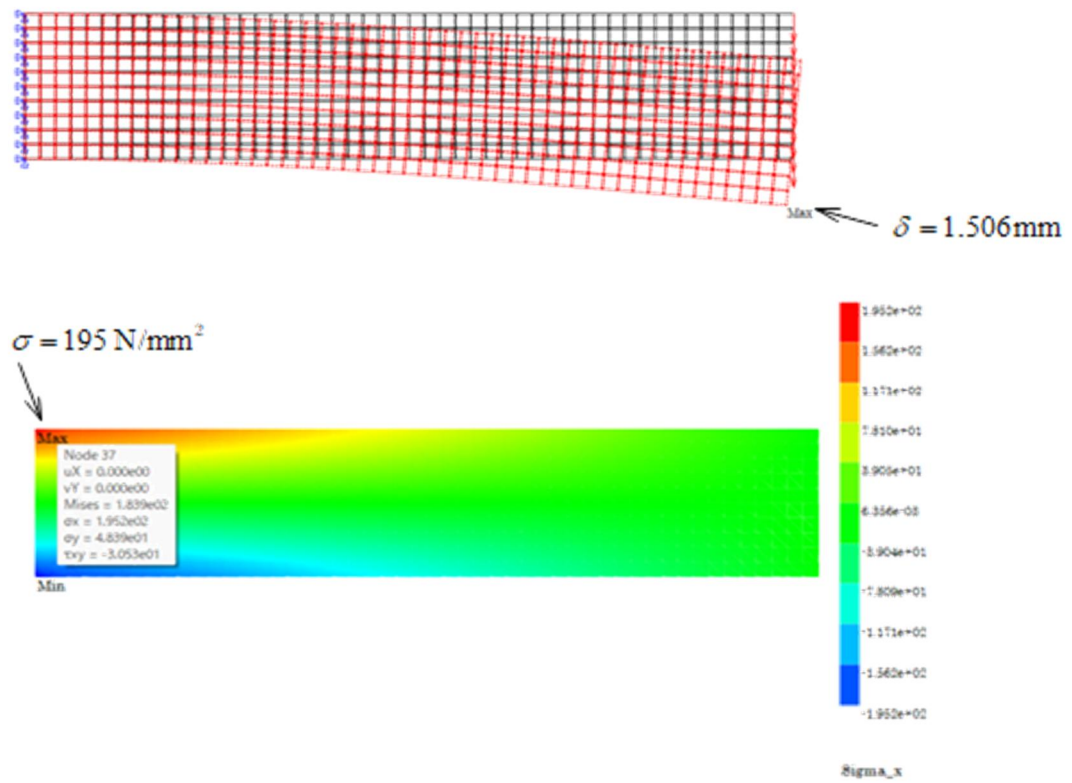


図 32 細分割したときのはりの曲げ

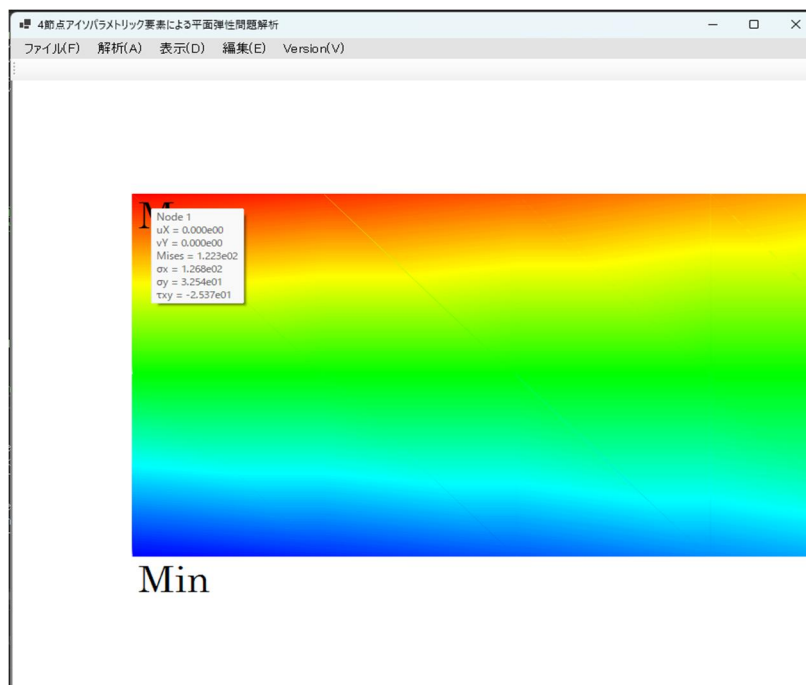


図 33 応力コンターの拡大表示の例



## 6.2 解析結果のテキスト出力

本プログラムでは、実行ファイル isop41.exe の置かれたフォルダーに、解析結果の詳細が Isop4-Results.txt というファイル名で書き込まれる。

本例のそのファイルの内容は以下のようなものである。

```
*****
*          有限要素法による平面弾性問題解析          *
*          ==4 節点アイソパラメトリック要素==          *
*          ( Skyline Method )                          *
*          Ver.1.04 (2026)                              *
*          == DATE & TIME 2026/01/21 13:55:29 ==          *
* Copyright(C) 2026 All Rights Reserved by T. HORIBE    *
*****
```

File name ==> C:\Users\user\Dropbox\vb2026\ifem\grid4v41\grid4v41\bin\Release\net8.0-windows\isop4meshresult.tmp

総 節 点 数 = 126  
総 材 料 数 = 1  
総 要 素 数 = 100  
拘 束 節 点 数 = 6  
荷 重 節 点 数 = 6

```
===== 節 点 デ ー タ =====
節点番号  x-座 標    y-座 標    節点番号  x-座 標    y-座 標
1          0        100        2          25        100
3          0         80        4          50        100
5         25         80        6           0         60
7         75        100        8          50         80
9         25         60       10           0         40
. . . . .
. . . . . (途中省略) . . . . .
. . . . .
119       450        20       120       425         0
121       500        40       122       475         20
123       450         0       124       500         20
```

125	475	0	126	500	0
-----	-----	---	-----	-----	---

===== 材 料 デ ー タ =====

材料番号	ヤング率	ポアソン比	板 厚
1	206000	0.3	5

===== 要 素 デ ー タ =====

要素番号	i	j	k	l	材料番号
1	3	5	2	1	1
2	5	8	4	2	1
3	8	12	7	4	1
4	12	17	11	7	1
5	17	23	16	11	1
.....					
..... (途中省略) .....					
.....					
95	105	111	104	98	1
96	111	116	110	104	1
97	116	120	115	110	1
98	120	123	119	115	1
99	123	125	122	119	1
100	125	126	124	122	1

===== 拘 束 条 件 =====

拘束節点番号	ix	x-変位拘束値	iy	y-変位拘束値
1	1	0	1	0
3	1	0	1	0
6	1	0	1	0
10	1	0	1	0
15	1	0	1	0
21	1	0	1	0

===== 荷 重 条 件 =====

節点番号	x 方向荷重	y 方向荷重
106	0	-500
112	0	-500
117	0	-500
121	0	-500
124	0	-500
126	0	-500

===== 変 位 =====

節点	u	v	節点	u	v
1	0.0000e+00	0.0000e+00	2	2.0804e-02	-1.1160e-02
3	0.0000e+00	0.0000e+00	4	4.0104e-02	-2.7897e-02
5	1.1271e-02	-6.9010e-03	6	0.0000e+00	0.0000e+00
7	5.8604e-02	-5.4256e-02	8	2.3362e-02	-2.4273e-02
. . . . .					
. . . . . (途中省略) . . . . .					
. . . . .					
119	-1.2528e-01	-1.2344e+00	120	-2.0720e-01	-1.1288e+00
121	-4.2017e-02	-1.4490e+00	122	-1.2613e-01	-1.3416e+00
123	-2.0987e-01	-1.2348e+00	124	-1.2648e-01	-1.4496e+00
125	-2.1159e-01	-1.3418e+00	126	-2.1238e-01	-1.4504e+00

===== 節 点 応 力 =====

	x 方向	y 方向	せん断	等価
節点番号	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$	$\sigma_e$
1	1.6708e+2	4.0854e+1	-2.4535e+1	1.5673e+2
2	1.5285e+2	7.3129e+0	-6.1988e+0	1.4992e+2
3	1.0179e+2	2.4101e+1	-1.5574e+1	9.6045e+1
4	1.4475e+2	5.5612e+0	-2.1784e+0	1.4297e+2
5	9.7323e+1	2.1314e+0	-5.1841e+0	9.8481e+1
. . . . .				

..... (途中省略) .....

.....

121	-3.0865e-1	2.3431e+0	-7.1247e+0	1.2855e+1
122	-5.0923e+0	2.8271e-1	-5.1024e+0	1.1000e+1
123	-1.6663e+1	-9.0271e-1	-2.5685e+0	1.7011e+1
124	-1.5427e+0	5.2347e+0	-5.0395e+0	1.1158e+1
125	-9.3867e+0	-5.2881e-1	-3.1482e+0	1.1503e+1
126	-4.2003e+0	5.2534e+0	-3.8575e+0	1.0581e+1

semax= 1.5673e+02 in Node No. 1

\*\*\*\*\*

2D FEM analysis by isop41 2026/01/21 13:55:29

\*\*\*\*\*

以上の出力内容のうちの荷重条件までは、入力データ内容の出力であり、それ以降は、FEM 解析によって得られたすべての節点変位や要素応力の出力である。また、応力の出力結果の最後の方には、最大等価応力の値なども出力されている。

出力結果のなかで、たとえば

節点	u	v	節点	u	v
1	0.0000e+00	0.0000e+00	2	2.0804e-02	-1.1160e-02
3	0.0000e+00	0.0000e+00	4	4.0104e-02	-2.7897e-02
.....					

と出力されている部分については、節点 1,2,3,4 の  $x, y$  方向の変位の大きさを表しており、入力時での長さの単位は【mm】であったので、これらの変位の単位は【mm】である。

同様に、要素番号ごとの出力

	x 方向	y 方向	せん断	等価
節点番号	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$	$\sigma_e$
1	1.6708e+2	4.0854e+1	-2.4535e+1	1.5673e+2
.....				

については、縦弾性係数を入力したときの単位 ( $\text{N/mm}^2$ ) に対応して、応力は  $\text{N/mm}^2$  の単位となっていることに留意する。すなわち、節点 1 に生じている応力は、例えば  $\sigma_x = 1.6708 \times 10^2 \text{ N/mm}^2 \div 167 \text{ MPa}$  と読み取ればよい。(ここで、等価とは、等価応力、すなわち Mises 応力を指す)

出力されるファイル Isop4-Results.txt は、FEM 解析の実行の度に同名で書き込まれる。したがって、

このファイルを保存したい場合には、別名でコピーしておくといよい。

### 6.3 ほかの解析例

本プログラムによる解析例を以下に示す。

#### 【例 1】板の引張り（Tension311.dat）

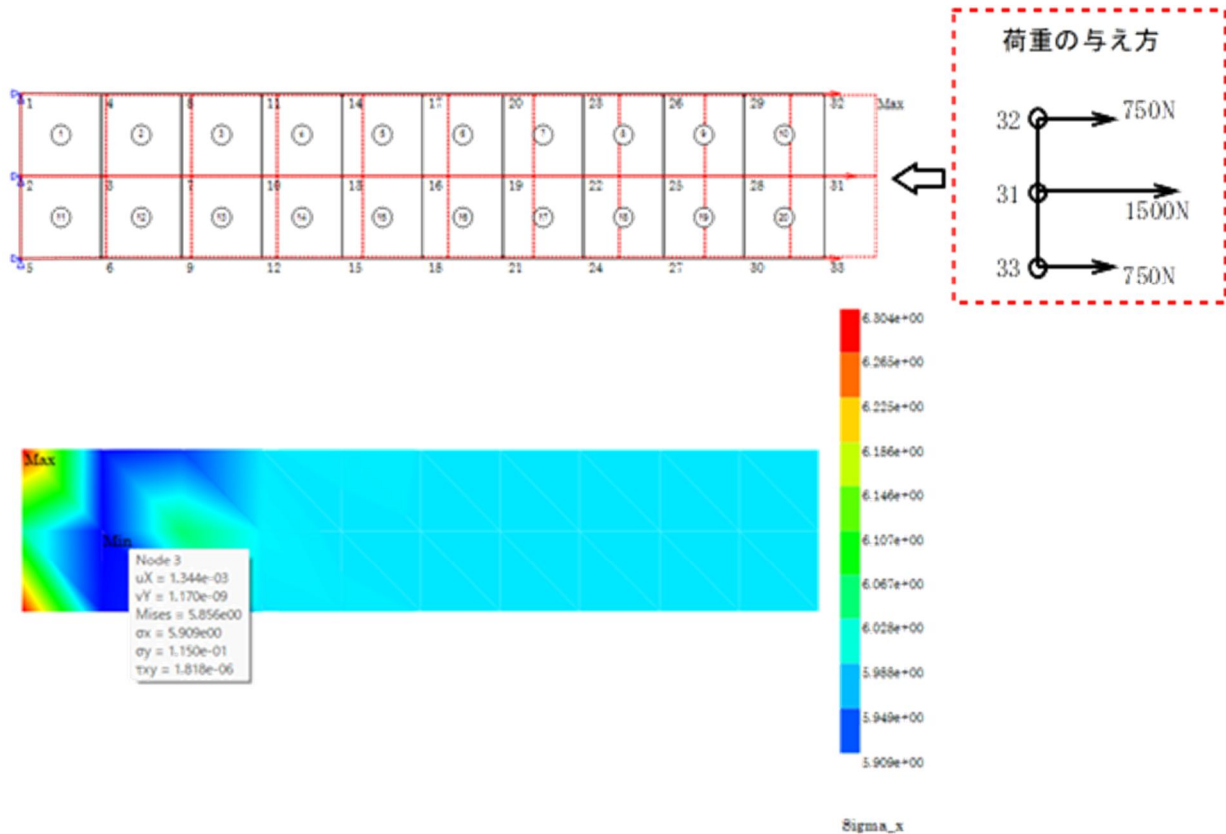


図 34 平板の引張り

図 34 は、図の形状の平板の右端に、水平方向に荷重 3000N を負荷したときの解析例である。この問題では、図 34 の右上に注記したように、右端への負荷荷重の与え方には注意が必要である。右端に作用させる水平荷重については、分布荷重から由来していると考ええると、節点 32, 31, 33 での荷重比は 1 : 2 : 1 となる。したがって、全荷重 3000 N を 750 N, 1500 N, 750 N と分配して作用させればよい。

この板は一様な引張り状態にあり、材料力学に基づく x 方向の応力や伸びは

$$\sigma = \frac{P}{bh} = \frac{3000}{5 \times 100} = 6 \text{ N/mm}^2, \quad \lambda = \frac{Pl}{AE} = \frac{3000 \times 500}{5 \times 100 \times 206 \times 10^3} = 0.0146 \text{ mm} \quad (6)$$

と求められる。一方、FEM による右端の節点の変位は  $1.450 \times 10^{-2} \text{ mm}$  と得られているので、正しい計算が行われていることがわかる。

図 34 では、 $\sigma_x$  がやや不自然な色づけになっているが、凡例を細かく見ると、x 方向応力はほぼ 6 N/mm<sup>2</sup> の値の前後で分布していることに気づく。応力値の小さな違いをことさらに 10 等分して色づけ

しているために生じた、不自然な結果である。固定端でやや高い応力が生じているのは、ポアソン効果による  $y$  方向への収縮量を無理に抑えつけているためである。

【例 2】円孔を有する帯板の引張り (enkou-strip.dat)

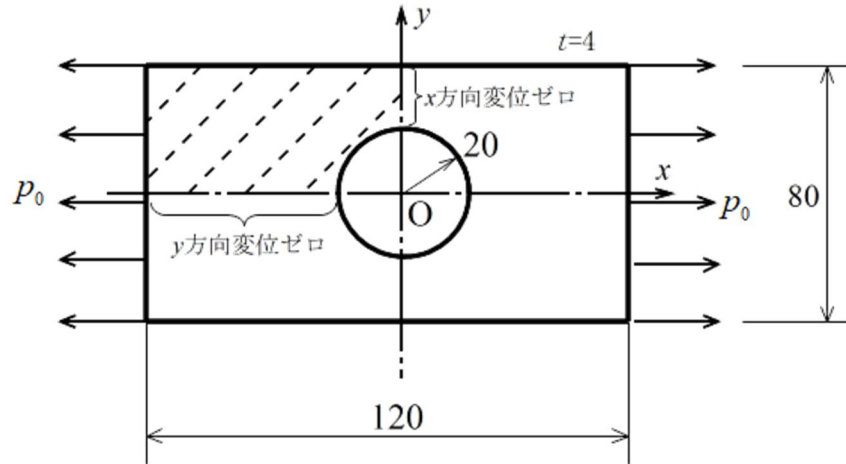


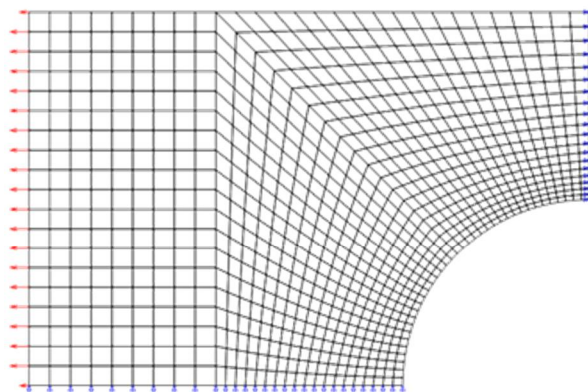
図 35 円孔を有する帯板の引張り

図 35 は、応力集中の典型的な問題として扱われる、円孔を有する帯板の引張り問題である。この問題は、 $x, y$  対称性を有するので、図 35 の破線で示した  $1/4$  部分だけを取り出して解析すればよい。ただし、円孔中心を通る  $x$  軸上の節点は  $y$  方向変位がゼロ、また  $y$  軸上の節点は  $x$  方向変位がゼロという変位拘束があることを考慮する必要がある。

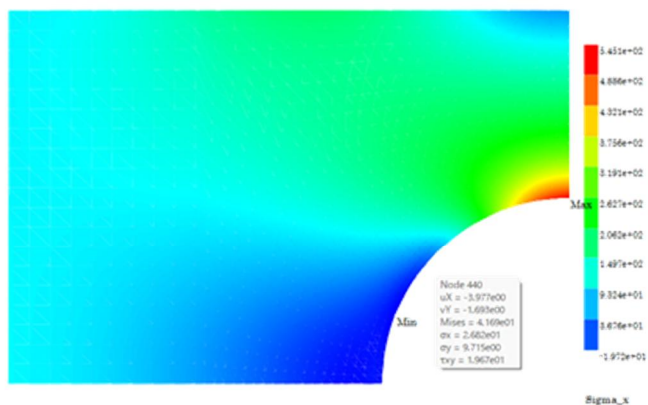
図 35 の寸法を与え、単位面積あたりの引張り力を  $p_0$ 、縦弾性係数を  $E=206 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$  として図 36(a) のようなメッシュ分割を行って解析する。なお、帯板の左側縦辺には、上下端の節点に 500N、それ以外の節点に 1000 N の節点力を左方に作用させている。その結果、図 36(b) のような  $\sigma_x$  の応力コンター図が得られる。予想通り、円孔周辺に最大応力が生じていることがわかる。

解析結果から、図 36 の左側の縦辺に生じている応力の  $x$  成分  $(\sigma_x)_0$  (これは  $p_0$  と等しい) を読み取ると、おおよそ  $(\sigma_x)_0 = 1.190 \times 10^2 \text{ N/mm}^2$  を得る。一方で、円孔周辺の  $x$  方向の最大応力は  $(\sigma_x)_{\max} = 5.451 \times 10^2 \text{ N/mm}^2$  と得られる。したがって、この帯板の応力集中係数  $K$  は

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{p_0} = \frac{5.451 \times 10^2}{1.190 \times 10^2} = 4.58 \quad (7)$$



(a) メッシュ分割 (960節点, 893要素)



(b) Mises応力のコンター図

図 36 円孔を有する帯板の要素分割と  $\sigma_x$  のコンターマップ

となる。

一方、著者による弾性論に基づく解析より、帯板幅に対する円孔の大きさの比を変数とする円孔周辺の応力集中係数は図 37 のような結果を得ている。図 37 より、 $a=0.5$  のとき（図 35 においては、帯板の幅 80 mm に対して、円孔の直径は 40 mm なので  $40/80=0.5$  と計算される量）の応力集中係数  $K$  は

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{p_0} \approx 4.6 \quad (8)$$

であるから、FEM 解と理論解とは良好に一致していることがわかる。なお、三角形一定ひずみ要素に基づく解析（570 節点）では  $K=4.36$  と得られている。

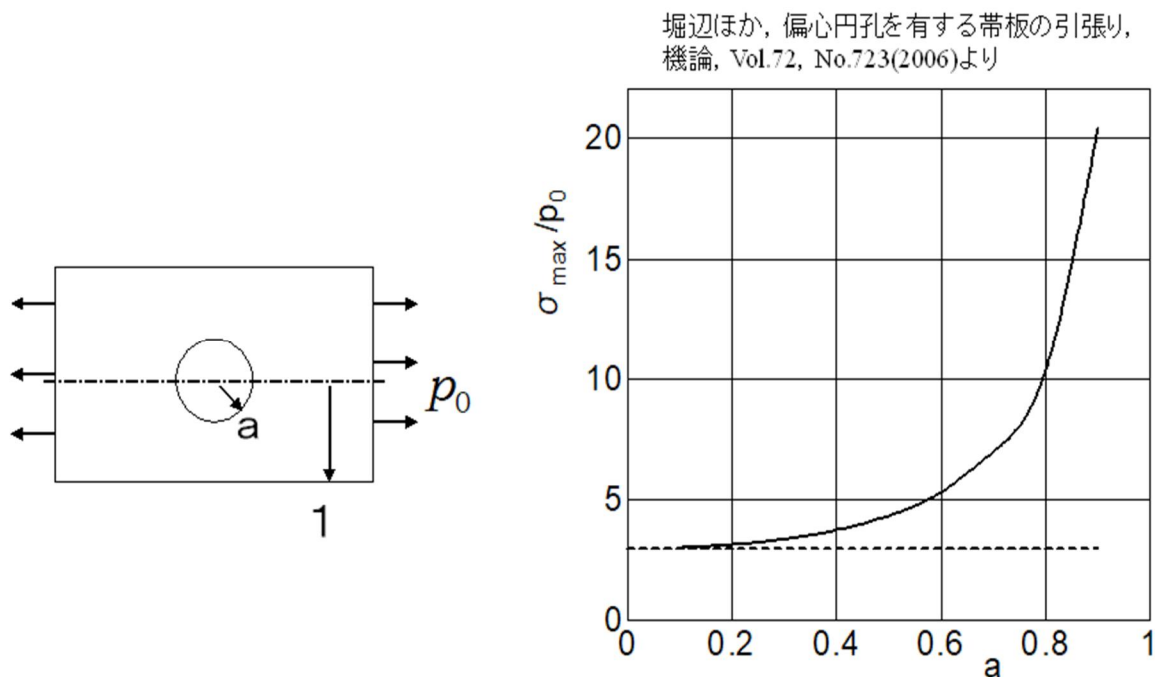


図 37 円孔を有する帯板の引張りの応力集中係

本解析では4節点要素を採用し、積分点応力の外挿・平均化処理を行っている。これにより、一定ひずみ三角形要素では表現が困難な円孔周辺の急激な応力変化も、図36(b)のように滑らかかつ高精度に再現できており、本プログラムの高い解析性能が示されている。

### 【例3】L型はりの曲げ (Rounded-lshape.dat)

図38は、L字型の物体の右側下方の辺に、下向きの荷重を作用させた場合の要素分割図とMises応力のコンター図を示している。丸められた角部に応力集中が生じている様子を捉えている。

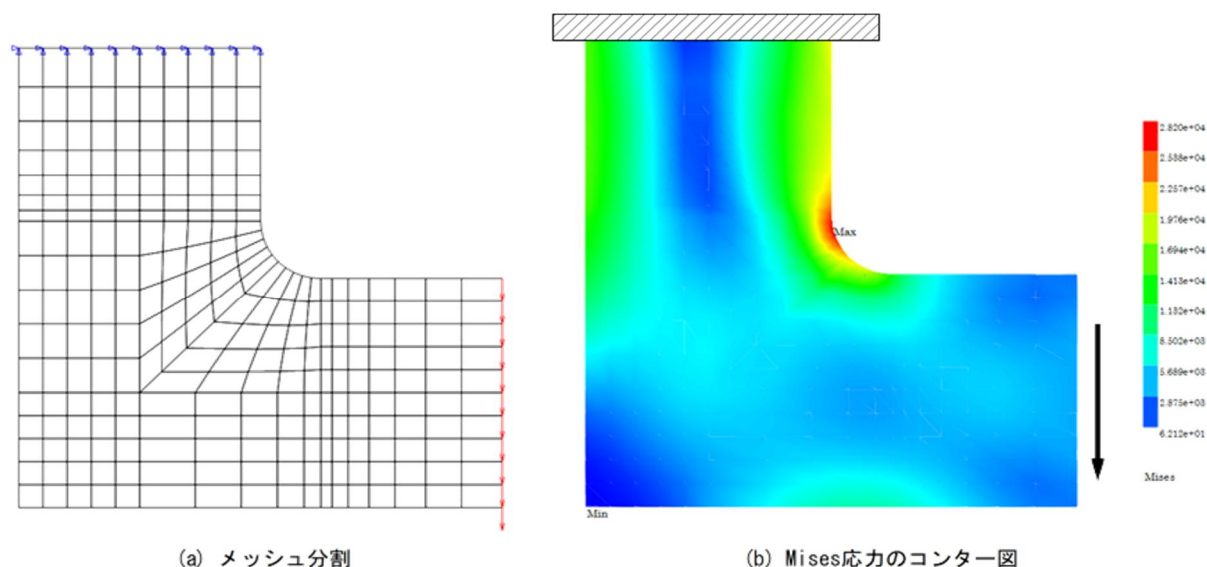


図 38 L型はりの曲げ

## 7. 利用上の注意, 著作権ほか

かつて有限要素法 (FEM) は、ごく一部のエンジニアが利用する特殊なソフトウェアであった。しかし、現在ではほとんどのエンジニアに広く認知されるソフトウェアとなっている。車の性能や使い勝手が向上すればするほど、車のボンネットを開ける者が少なくなってきたと言われている。これと同様に、有限要素法もブラックボックス化が進み、その動作原理にまで思いを巡らす者は少なくなっているように思われる。

しかしながら、有限要素法がどのようなプロセスを経て動作しているのかを理解していれば、それを的確に、かつ正しく使いこなすことが可能となる。

近年の汎用 FEM ソフトは非常に高機能であるが、利用者にとって必要なのはその一部に限られる場合が多い。簡単な問題を汎用ソフトで解くのは、たとえば言えば、近所のコンビニエンスストアへ買い物に行くのに大型バスを使うようなものである。近所への買い物であれば、自転車ですぐである。

このような問題意識のもと、小回りが利き、プログラムの内部構造が見通しやすい FEM ソフトが必要であると考え、本プログラムの開発に至っている。



メッシュ分割を詳述したテキストとして文献(5),(6)が挙げられるが、それらはいずれもメッシュ生成のみに言及しており、変位拘束や荷重などの境界条件の設定は読者に任せられている。このため、読者は境界条件についてはみずから設定しなければならず、これは、意外と手間を要する作業である。本プログラムでは、四角形メッシュ生成から境界条件設定までの一連の作業を、GUI 操作に基づいて行うものである。

また、メッシュ生成プログラム (grid4v41.exe) によってファイル出力されたデータを、4 節点アイソパラメトリック要素を用いた FEM プログラム (isop41.exe) が自動的に読み込んで FEM 解析を行うことができる。すなわち、本プログラムでは、メッシュ生成を行うプログラムと FEM 解析プログラムとがシームレスにつながっていて、汎用ソフトと同等の操作手順で FEM 解析を行うことが可能となる。

本プログラムは自由に利用可能であるが、著作権は著者に帰属しており、無断での複製や第三者への配布はご遠慮いただきたい。また、本プログラムには未だバグや操作上の不具合が潜在している可能性がある。万一不具合を発見された場合には、以下の連絡先までご一報いただけると幸いである（連絡先：tadashihoribe@gmail.com）。

## 参考文献

- (1) 戸川, 有限要素法概論, 培風館 (1980).
- (2) 堀辺, Visual Basic でわかるやさしい有限要素法, 森北出版 (2008).
- (3) L. J. Segerlind 著, 川井監訳, 「応用有限要素解析」, 丸善 (1982).
- (4) George, A. and Liu, J. W. (1981). Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems. Prentice-Hall.
- (5) 谷口, FEM のための自動要素分割, 森北出版 (1992).
- (6) 杉原, 計算幾何学, 岩波書店 (2002).
- (7) 朝井, 3 ステップでしっかり学ぶ Visual Basic 入門, 技術評論社 (2023).

## 【付録】

### 1. Reverse Cuthill-McKee (RCM) 法

バンド幅を縮小する RCM 法のアルゴリズムを以下に要約する.

#### 1. 開始点を見つける (次数の最小化)

まず, メッシュの中で一番「つながりが少ない (次数が低い)」節点を探す.

理由: メッシュの真ん中から始めると番号が四方八方に散らばってしまう. 領域の境界から順番に始めるとよい.

#### 2. 「幅優先探索」で番号を振る (CM 法)

ここがこのプログラムの `While queue.Count > 0` の部分となる.

手順: 1. 決まった節点から, まずは「直接つながっている節点」すべてに番号を振る.

手順 2. その際, 「つながりが少ない節点」から優先して番号を振る (これがプログラムの `OrderBy(Function(n) degree(n))` の部分).

手順 3. 隣の節点への番号付けが終わったら, その隣の隣へ……と, 波紋が広がるように順番を決めて節点番号をふっていく.

結果: 以上により, 物理的に近い節点に近い番号が割り振られる.

#### 3. 最後に「逆順」にする (Reverse)

ここが最後の重要なポイント (プログラムの `result_list.Reverse()`).

上の挙げた 2 番までの手順 (CM 法) で終わらせるよりも, 最後に節点番号を全部ひっくり返して「後ろから数える」方が, 有限要素法の行列計算 (特にスカイライン法) においては, メモリの節約効率がさらに高まることが数学的に証明されている.

## 2. ブロック分割法によるメッシュ生成サブルーチン解説

本プログラムでは、解析領域を複数の四辺形ブロックに分割し、各ブロックを規則的に細分化することにより、有限要素法（FEM）解析用の四辺形メッシュを生成している<sup>(3)</sup>。図 A1 に、ブロック分割法によるメッシュ生成の概念を示す。

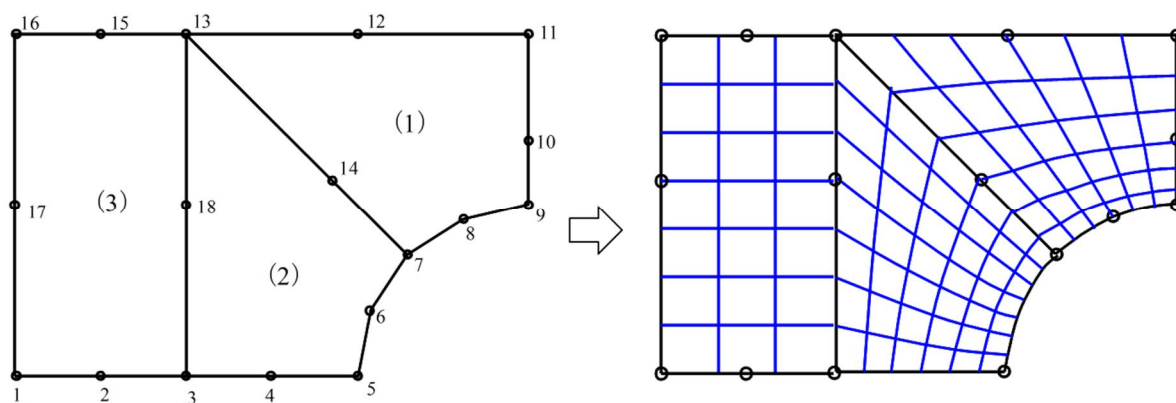


図 A1 ブロック分割法による四辺形メッシュ生成の概念図

各ブロックは 8 節点四辺形要素で定義されており、曲線境界を含む領域に対しても滑らかなメッシュ生成が可能である。

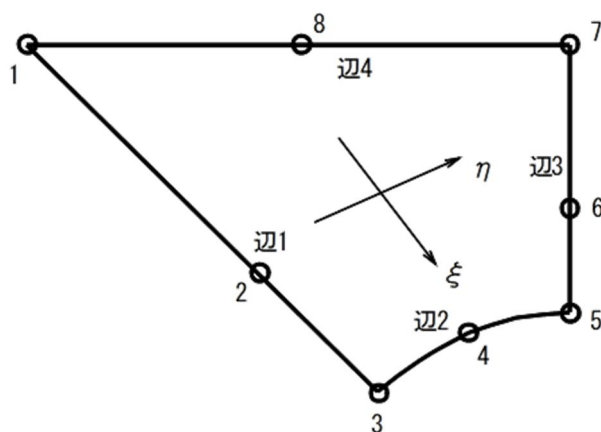


図 A2 8 節点四辺形要素と局所座標系（ $\xi$ ,  $\eta$ ）

図 A2 に、8 節点四辺形要素の節点配置および局所座標系を示す。なお、辺番号は図 A2 のように定義する。本プログラムでは、局所座標系

$$-1 \leq \xi \leq 1, \quad -1 \leq \eta \leq 1$$

を用い、8 節点形状関数によってブロック内部の節点座標を補間計算している。

これにより、境界が直線でない場合でも、幾何形状を忠実に再現したメッシュが生成される。

各ブロックは、nrow × ncol によって指定された分割数に基づき、局所座標系上で規則的に分割される。

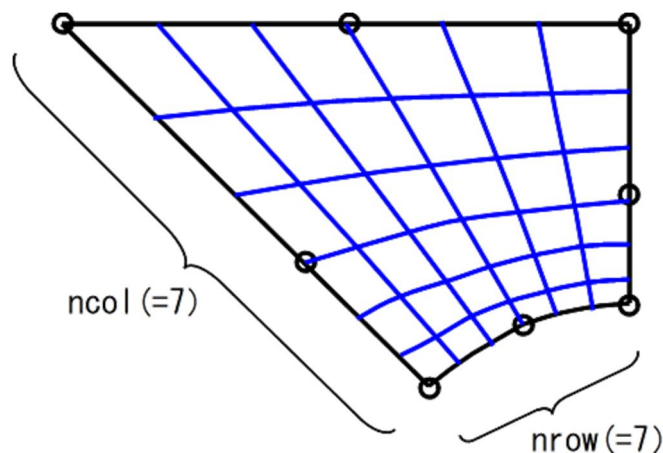


図 A3 ブロック内部の格子分割と節点生成

図 A3 に、ブロック内部での格子点生成の模式図を示す。

各格子点の実座標は、8 節点形状関数を用いて次式により計算される。

$$x = \sum_{k=1}^8 N_k x_k, \quad y = \sum_{k=1}^8 N_k y_k$$

複数のブロックが隣接している場合、境界上の節点番号は必ず共有されなければならない。

図 A4 に、隣接ブロック間で節点番号を共有する処理の概念を示す。

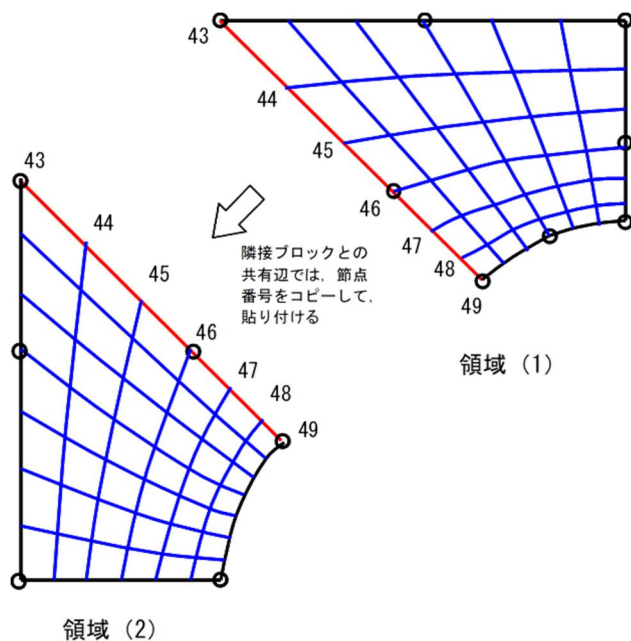


図 A4 隣接ブロック間の節点共有処理

本プログラムでは、先に生成されたブロックの境界節点番号を保存し、後続ブロックがこれを参照・コピーすることで、節点の二重生成を防止している。また、隣接ブロック間で節点の並び方向が逆になる場合があるため、境界番号の並び順を反転させる制御テーブル  $\text{icomp}(i,j)$  を用いている。

節点共有処理に用いられる変数  $\text{nnrb}$  は、以下のような 3 次元配列として定義されている。

**$\text{nnrb}$ (領域番号, 辺番号, 節点の位置)**

領域番号 (kkk) : 現在処理している, あるいは過去に処理したブロックの番号。

辺番号 (1~4) : 四辺形ブロックのどの辺か (1:下辺, 2:右辺, 3:上辺, 4:左辺)。

節点の位置: その辺の上に並んでいる節点の順番 (1 番目, 2 番目……)。

図 A4 の共有処理に用いる配列変数  $\text{nnrb}$  は、領域 (1) では辺番号 1 であり、領域 (2) では辺番号 3 であることから

$\text{nnrb}(1,1,1)=43, \text{nnrb}(1,1,2)=44, \text{nnrb}(1,1,3)=45, \text{nnrb}(1,1,4)=46, \text{nnrb}(1,1,5)=47, \text{nnrb}(1,1,6)=48, \text{nnrb}(1,1,7)=49$

$\text{nnrb}(2,3,1)=43, \text{nnrb}(2,3,2)=44, \text{nnrb}(2,3,3)=45, \text{nnrb}(2,3,4)=46, \text{nnrb}(2,3,5)=47, \text{nnrb}(2,3,6)=48, \text{nnrb}(2,3,7)=49$

である。

ここで、重要なのが、領域同士の「向き」である。領域 1 の「下辺」では「43 から 49」に数えているが、領域 2 の「上辺」を「49 から 43」に数えていて、番号の並びが反転している。このとき、どの順番 (正順か逆順か) で  $\text{nnrb}$  から番号を取り出すべきかを指示する変数  $\text{icomp}(i, j)$  を用いる。

ここで、 $\text{icomp}(i, j)$  の引数の意味は、

i (自分の辺番号): 1 (下)、2 (右)、3 (上)、4 (左)

j (相手の辺番号): 相手ブロックのどの辺と接しているか (1~4)

この組み合わせに対して、中身には「1 (正順)」または「-1 (逆順)」というフラグが格納されている。

この 2 つの変数  $\text{nnrb}()$ ,  $\text{icomp}()$  が組み合わせることで、どのようなブロック配置でも節点番号の「縫い合わせ」が可能になる。

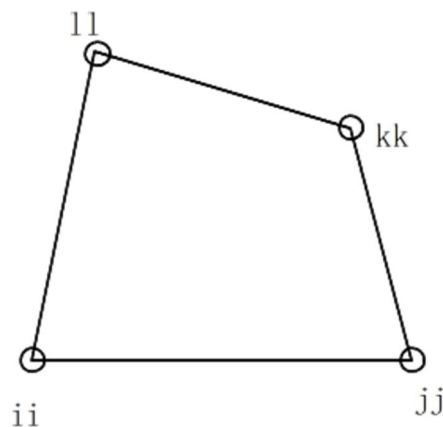


図 A5 四辺形要素の節点番号付け (反時計回り)

図 A5 に、生成される四辺形要素の節点番号付けを示す。本プログラムでは、すべての四辺形要素について、反時計回り（CCW）に節点番号を配置している。

左下節点：ii，右下節点：jj，右上節点：kk，左上節点：ll

この順序を採用することで、ヤコビアンが正となり、有限要素解析における数値的安定性が確保される。

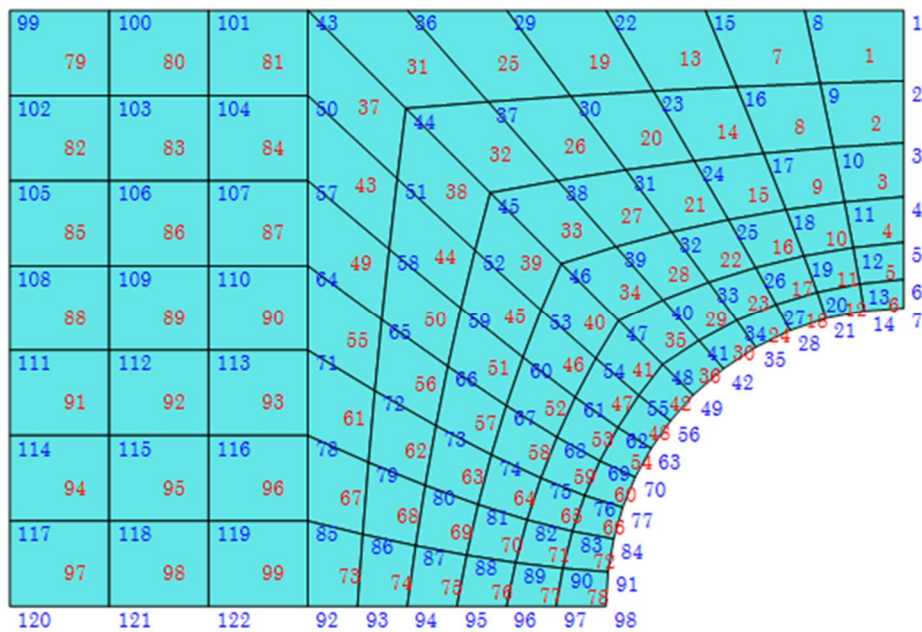


図 A6 メッシュ生成後の節点・要素作成例

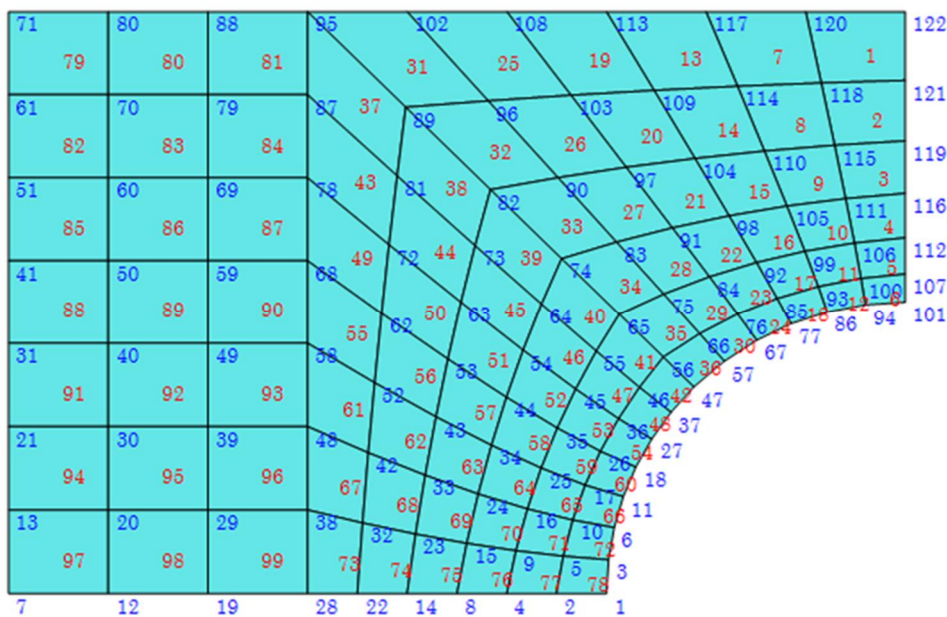


図 A7 RCM 法によるリナンバリング

図 A6 に、すべてのブロック処理が完了した後の全体メッシュ作成例を示す。この段階では、節点座標は領域ごとに機械的に番号付けされており、とくにバンド幅の拡がりに対する配慮はなされていないことに注意しよう。たとえば、要素番号 81 は、節点番号は 104, 50, 43, 101 となっていて、番号差は  $104-43=61$  となっている。

最後に、図 A7 に示すように、RCM 法による節点番号の再配置を行う。その結果、例えば要素番号 81 の要素では、節点番号が 79, 87, 95, 88 につけ変わり、節点番号差が 16 までに縮小されていることがわかる。これにより、剛性行列のバンド幅が縮小され、計算効率およびメモリ使用量が改善される。

## 2. ブロック分割法の流れ図

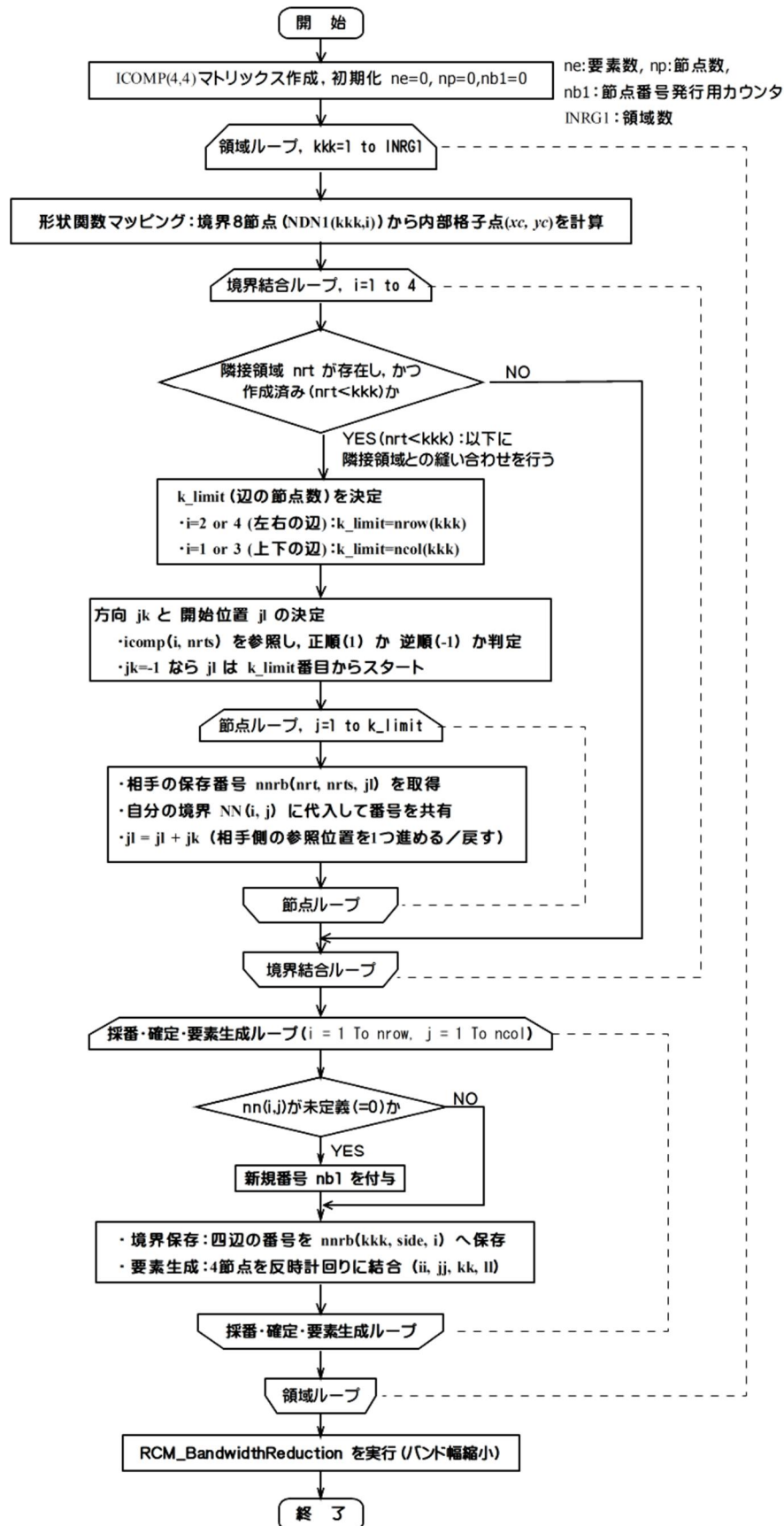


図 A.8 ブロック分割法の流れ図



### 3. 有限要素法の流れ図

有限要素解析の流れ図は以下の通りである．なお，このほかに，プリポストの図形処理に関する部分も多数プログラムされているが，紙面の都合上，省略する．

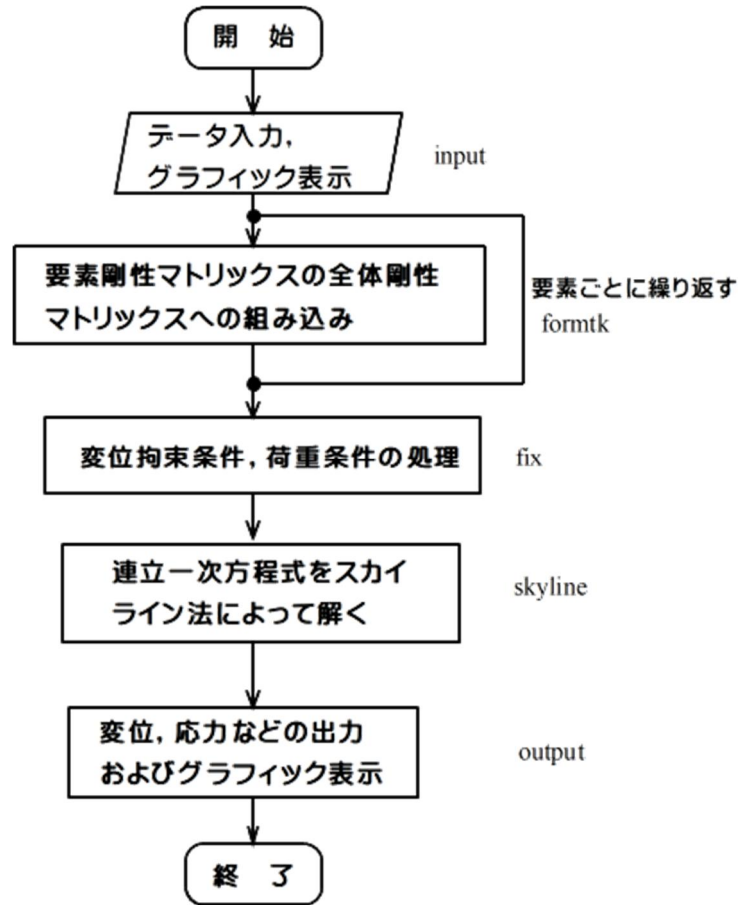


図 A9 有限要素解析の流れ図

### 4. 4 節点アイソパラメトリック要素の剛性マトリックス

図 A10 は，4 節点アイソパラメトリック要素の例で， $\xi, \eta$  は反時計回りに定めた 4 つの頂点 1, 2, 3, 4 でそれぞれ  $(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)$  の座標値をとる局所座標である．

このとき，内挿関数は

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

である．要素内変位は，節点変位を  $(u_i, v_i)$  ( $i=1, \dots, 4$ ) として

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i \quad (\text{A.2})$$

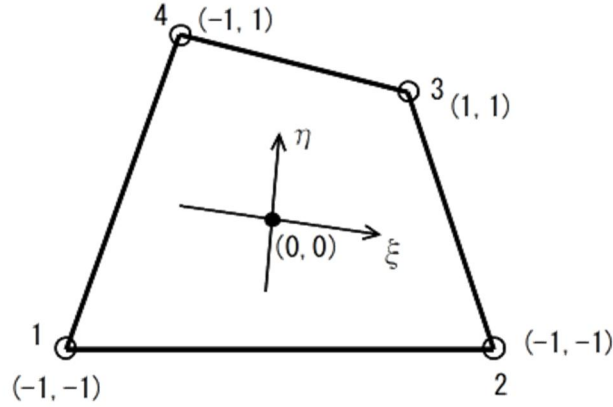


図 A10 4 節点アイソパラメトリック要素

となる．また，アイソパラメトリック要素では，座標関数  $(x, y)$  に関して式(A.2)と同様に

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \quad (\text{A.3})$$

が成り立っている．

これらの高次要素を用いた要素剛性マトリックスは，次式(8.16)より得られる．ここで，領域に関する積分は解析的に求めることが困難なため，通常はこの領域積分に Gauss の数値積分を用いることが多い．

#### 9.5 4 節点アイソパラメトリック要素の剛性マトリックス

前節では 4 節点アイソパラメトリック要素の計算の概略を示したが，ここではプログラムの理解のためにその具体的な計算方法を示すことにする．

図 A10 に，要素の正規化した局所座標  $(\xi, \eta)$  を示す．この場合の内挿関数は，式 (A.1) で示したように

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

である．

また，変位  $(u, v)$  と要素内座標  $(x, y)$  は，節点での変位  $(u_i, v_i)$

や座標  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1 \sim 4$ ) を用いて

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i; \quad x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \quad (\text{A.5}), (\text{A.6})$$

となる．

さらに，剛性マトリックスは

$$[K] = \iiint [B]^T [D] [B] dV = \iint [B]^T [D] [B] t dx dy \quad (A.7)$$

である．ここで， $[D]$ は弾性定数マトリックス， $[B]$ は応力-ひずみマトリックス， $t$ は板厚である．

式(A.7)を，局所座標 $(\xi, \eta)$ での積分に座標変換すると

$$[K] = \iint [B]^T [D] [B] t dx dy = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (A.8)$$

となる．ここで $|J|$ は，ヤコビアンで，

$$|J| = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (A.9)$$

である．

また，式(9.3)の $[B]$ マトリックスは，3行8列の大きさで，式(8.12)より，

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (A.10)$$

となることがわかる．

また，剛性マトリックスの大きさは，式(A.7)より

$$[K] = \iint [B]^T [D] [B] t dx dy = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (A.11)$$

のように，8行8列である．

式(A.11)の積分を実行するためには，式(A.11)の各成分を $(\xi, \eta)$ で表さなければならない．

内挿関数 $N_i$ の $(x, y)$ による微分は，式(A.4)のように $N_i$ が $(\xi, \eta)$ で表されているため，難しい．そこで

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

が成り立っているから，

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (A.12)$$

となり，この逆関係より

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

を求めて、内挿関数  $N_i$  の  $(x, y)$  による微分を行う。

ここで、 $[J]^{-1}$  は

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{22}' & -J_{12}' \\ -J_{21}' & J_{11}' \end{bmatrix} = \frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

となる。

$J_{11} \sim J_{22}$  などは、実際には

$$J_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} x_j, \quad \dots, \quad J_{22} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} y_j$$

であるので、これを具体的に計算してみると

$$\left. \begin{aligned} J_{11} &= \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} x_j = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4 \\ &= \frac{1}{4}(1-\eta)(x_2 - x_1) + \frac{1}{4}(1+\eta)(x_3 - x_4) \\ J_{12} &= \frac{1}{4}(1-\eta)(y_2 - y_1) + \frac{1}{4}(1+\eta)(x_3 - x_4) \\ J_{21} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(x_4 - x_1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(x_3 - x_2) \\ J_{22} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(y_4 - y_1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(y_3 - y_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.15})$$

を得る。したがって、式(A.13), (A.15)より、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} \{ (y_3 - y_4)\xi + (y_2 - y_3)\eta - y_2 + y_4 \}, \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} \{ -(y_3 - y_4)\xi + (y_1 - y_4)\eta + y_1 - y_3 \}, \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} \{ -(y_1 - y_2)\xi + (y_1 - y_4)\eta + y_2 - y_4 \}, \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} \{ (y_1 - y_2)\xi - (y_2 - y_3)\eta - y_1 + y_3 \} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.16})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta} \{-(x_3 - x_4)\xi - (x_2 - x_3)\eta + x_2 - x_4\}, \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta} \{(x_3 - x_4)\xi + (x_1 - x_4)\eta - x_1 + x_3\}, \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta} \{(x_1 - x_2)\xi - (x_1 - x_4)\eta - x_2 + x_4\}, \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta} \{-(x_1 - x_2)\xi + (x_2 - x_3)\eta + x_1 - x_3\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.17})$$

ここで,

$$\begin{aligned} \Delta &= \{(x_1 - x_2)(y_3 - y_4) - (x_3 - x_4)(y_1 - y_2)\}\xi \\ &\quad + \{(x_1 - x_4)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_4)\}\eta \\ &\quad - (x_1 - x_3)(y_2 - y_4) + (x_2 - x_4)(y_1 - y_3) \end{aligned}$$

である.

したがって, 式(A.17)より, 式(A.11)が $(\xi, \eta)$ によって表されたことになる. ただし, 式(A.11)は解析的には積分しがたいので, Gauss の数値積分公式を用いる.

例えば,  $(-1 < \xi < 1, -1 < \eta < 1)$  の領域での Gauss の 9 点積分公式は, 被積分関数を  $f(\xi, \eta)$  とすると

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 w_p w_q f(\xi_p, \eta_q) \quad (\text{A.18})$$

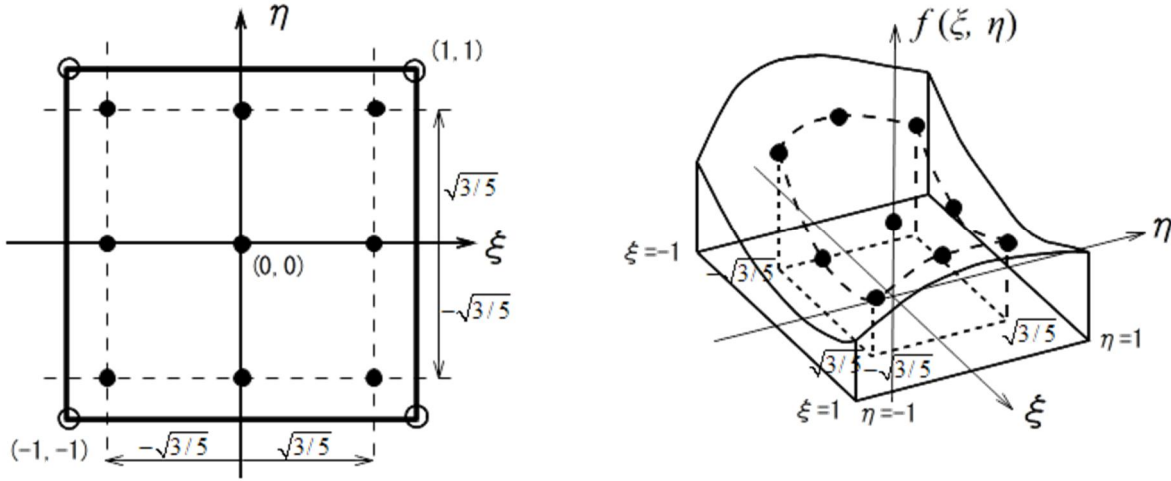


図 A11 Gauss の 2 重積分

ここで,  $w_p$  は重み係数,  $\xi_p$  は積分点 (図 A11 参照) の座標であり, 以下の値をとる.

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \eta_1 = -\sqrt{3/5} = -0.7745966, \quad w_1 = 0.5555556 \\
\xi_2 &= \eta_2 = 0.0000000, \quad w_2 = 0.8888889 \\
\xi_3 &= \eta_3 = \sqrt{3/5} = 0.7745966, \quad w_3 = 0.5555556
\end{aligned}
\tag{A.19}$$

と表される.